



AUDENTESE ÜLIKOOL
AUDENTES UNIVERSITY

MAJANDUSMATEMAATIKA I

Ako Sauga

Tallinn 2003

SISUKORD

1. MUDELID MAJANDUSES	4
Mudeli mõiste.	4
Matemaatiliste mudelite liigitus ja elemendid	5
Matemaatilise mudeli struktuur ja sisu	5
2. FUNKTSIOONID JA NENDE ALGEBRA	6
Arvud ja nende hulgad	6
Funktsionaalne sõltuvus	7
Astendamine. Polünoomid.	8
Kulu-, tulu- ja kasumifunktsioon.	10
Kasumifunktsioon lineaarse nõudlus- ja kulufunktsiooni korral.	15
ÜLESANNETE VASTUSED	17
3. VÕRRANDID	17
Lineaarsed võrrandid. Tasuvusanalüüs.	17
Ruutvõrrandid	19
ÜLESANNETE VASTUSED	22
4. PROTSENT- JA FINANTSARVUTUSED	22
Protsentülesannete põhitüübid.	22
Protsentuaalne kasvamine ja kahanemine.	23
Hinnad ja palgad	24
Lihtintressid. Aritmeetiline rida	25
Liitintressid. Geomeetiline rida	29
ÜLESANNETE VASTUSED	31
5. LINEAARSED VÕRRANDSÜSTEEMID.	31
Asendus- ja liitmisvõte	31
Determinantide kasutamine võrrandsüsteemi lahendamisel.	35
Võrrandsüsteemi graafiline lahendamine	37
ÜLESANNETE VASTUSED	37
6. LINEAARSED FUNKTSIOONID	38
Võrdeline ja lineaarne seos.	38
Lineaarse mudeli parameetrite leidmine	39
Sirge võrrand.	40
Eelarvejooned Sirge üldvõrrand	42
ÜLESANNETE VASTUSED	46
7. ELEMENTAARFUNKTSIOONE	46
Pöördvõrdeline sõltuvus.	46
EkspONENTFUNKTSIOON.	49
Arv e . Pidev juurdekasv.	51
Ekspponentsiaalsed mudelid	52
Logaritmid	54
EkspONENTVÕRRANDID	56
ÜLESANNETE VASTUSED	57
8. MAATRIKSID	57
Maatriksi mõiste	57
Maatriksite liitmine ja lahutamine	59
Maatriksi korrutamine skalaariga.	61

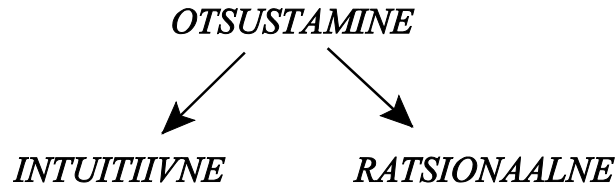
Maatriksi transponeerimine.	61
Maatriksite korrutamine	62
Näiteid maatriksalgebra kasutamisest.	65
Oleku- ja üleminekumaatriksid	67
Determinant	68
Pöördmaatriks	71
Lineaarvõrrandsüsteemi lahendamine maatriksvõrrandi abil.	72
ÜLESANNETE VASTUSED	74
MATEMAATIKAS KASUTATAVAID TÄHISTUSI	76
KASUTATUD KIRJANDUS	77
NÄITED	
NÄIDE 1.1. Lõppkapitali arvutamise mudel	5
NÄIDE 1.2. Toodangukasvu mudel	5
NÄIDE 2.1. Nädala läbimüük kui funktsioon	7
NÄIDE 2.2. Funktsiooni analüütiline kuju	8
NÄIDE 2.3. Kulufunktsioon	10
NÄIDE 2.4. Tulufunktsiooni leidmine	12
NÄIDE 2.5. Kasumifunktsiooni leidmine	12
NÄIDE 2.6. Tulu- ja kasumifunktsiooni leidmine.	15
NÄIDE 2.7. Liitfunktsioon	16
NÄIDE 3.1. Tasuvusanalüüs.	17
NÄIDE 3.2. Kumb teenustepakkuja valida?	18
NÄIDE 3.3. Tasuvuspunktid	20
NÄIDE 3.4. Turu tasakaal	21
NÄIDE 4.1. Protsendi leidmine	22
NÄIDE 4.2. Arvu leidmine protsendi järgi	22
NÄIDE 4.3. Osa leidmine	22
NÄIDE 4.4. Protsentuaalne kasv.	23
NÄIDE 4.5. Sisseostuhind, omahind ja jaehind	24
NÄIDE 4.6. Netopalga põhjal	25
NÄIDE 4.7. Lihtintress.	26
NÄIDE 4.8. Lihtintress	26
NÄIDE 4.9. Lihtintress perioodiliste sissemaksete korral.. . . .	26
NÄIDE 4.10. Laenu tagasimaksmine võrdsetes osades.	28
NÄIDE 4.11. Lihtintress.	29
NÄIDE 4.12. Raha tulevikuväärtus	29
NÄIDE 4.13. Lihtintress perioodiliste maksete korral.	30
NÄIDE 5.1. Lineaarse võrrandsüsteemi lahendamine asendusvõttega	31
NÄIDE 5.2. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine asendusvõttega.	32
NÄIDE 5.3. Lineaarse võrrandsüsteemi lahendamine liitmisevõttega.	33
NÄIDE 5.4. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine.	33
NÄIDE 5.5. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine.	34
NÄIDE 5.6. Võrrandsüsteemi lahendamine determinantide abil	35
NÄIDE 6.1. Võrdeline sõltuvus	38
NÄIDE 6.2. Lineaarse kulufunktsiooni parameetrite leidmine	39
NÄIDE 6.3. Kiiruse leidmine	40
NÄIDE 6.4. Tulufunktsioon lineaarse nõudlusfunktsiooni korral	41
NÄIDE 6.5. Kahe sirge lõikepunkti leidmine.	41
NÄIDE 6.6. Eelarve jooned	42
NÄIDE 6.7. Palgapiirangu sirge	44
NÄIDE 6.8. Eelarve joonte muutumine	45

NÄIDE 7.1. Püsikulud tooteühiku kohta.	46
NÄIDE 7.2. Nõutava koguse ja hinna vaheline seos konstantse tulu korral	48
NÄIDE 7.3. Keskmise kulu tooteühiku kohta	48
NÄIDE 7.4. Kogukulude mudel, lineaarne ja pöördvõrdeline osa.	48
NÄIDE 7.5. Internetiühenduste eksponentsiaalne kasv	49
NÄIDE 7.6. Liitintress eksponentfunktsioonina	50
NÄIDE 7.7. Amortisatsioon	51
NÄIDE 7.8. Eesti finantssektori eksponentsiaalsed mudelid.	52
NÄIDE 7.9. Maakera rahvaarv	53
NÄIDE 7.10. Töö efektiivsuskõver	53
NÄIDE 7.11. Perioodide arvu leidmine	55
NÄIDE 7.12. Logaritmiline kasv Eesti pangandussektoris	56
NÄIDE 7.13. Eksponentvõrrandi lahendamine	56
NÄIDE 8.1. Maatriksesituse kasutamine	57
NÄIDE 8.2. Maatriksesituse kasutamine turu analüüsil	58
NÄIDE 8.3. Transponeeritud maatriksid	61
NÄIDE 8.4. Maatriksite korrutis	63
NÄIDE 8.5. Tootmiseks vajalike komponentide arvu leidmine maatriksarvutuse abil	65
NÄIDE 8.6. Maatriksalgebra kasutamine tootmise planeerimisel	66
NÄIDE 8.7. Koguse-, kulu-, hinna- ja tulumaatriks.	66
NÄIDE 8.8. Oleku- ja üleminekumaatriksid.	67
NÄIDE 8.9. Turujaotuse muutumine	68
NÄIDE 8.10. III järku determinandi leidmine	70
NÄIDE 8.11. III järku determinandi leidmine	70

1. MUDELID MAJANDUSES

Mudeli mõiste.

Igapäevases majandustegevuses tuleb pidevalt langetada otsuseid. Eesmärgiks võib olla efektiivne tegutsemine piiratud ressursside tingimustes, suurema turuosa hõivamine, kapitali võimalikult kasulik investeerimine.



Intuitiivne otsustamine põhineb kujutlusel. Puudused:

- ▶ ei kasutata ära kogu olemasolevat informatsiooni;
- ▶ võidakse teha valesid oletusi majandussuuruste vaheliste seoste kohta;
- ▶ ei kasutata tänapäeva arvutustehnika võimalusi.

Ratsionaalne otsustamine eeldab oskust probleeme matemaatiliselt formuleerida ning kasutada mitmesuguseid matemaatilisi ja statistilisi meetodeid. Matemaatiline formuleering võimaldab kasutada otsustamisprotsessil arvuti abi ning teha täpsemaid prognoose majandussituatsiooni muutumisel.

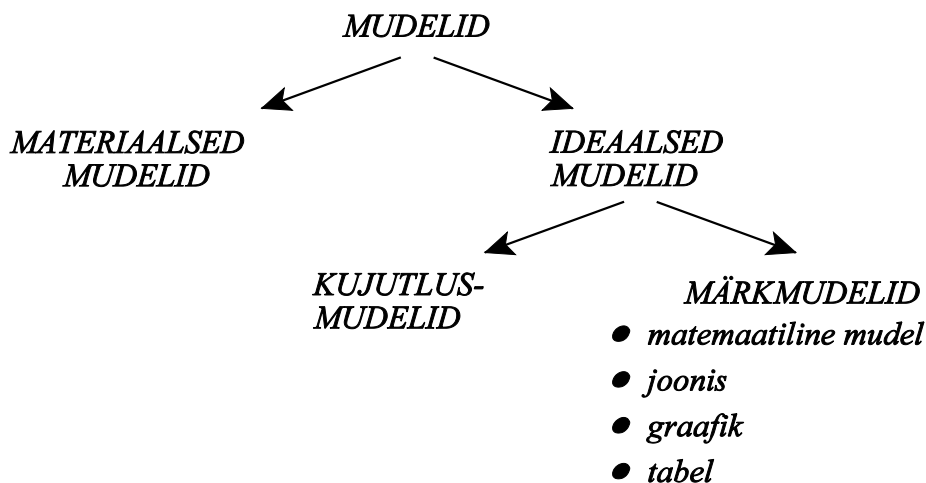
Kuna majanduses võib katsetamine osutada sageli väga kulukaks, on otstarbekas kasutada majandusnähtuste ja -protsesside uurimisel **mudeleid**.

Mudel on objekt, mis on kindlas vastavuses mingi teise objektiga, originaaliga., asendab seda tunnetamisel ja võimaldab saada selle kohta vahendatud andmeid.

Võib öelda ka, et mudel on reaalsuse ülevaatlilik, eesmärgipäraselt lihtsustatud peegeldus. Mudeleid kasutatakse juhul, kui originaali otsene uurimine on võimatu, raske, kulukas.

Mudel **peab**

- ▶ välja tooma originaali iseloomulikud jooned;
- ▶ kõrvale jätma kõik teisejärgulise.



Matemaatiline mudel on märkmudel, kus originaali uurimine taandub matemaatiliste seoste uurimisele.

Matemaatiliste mudelite liigitus ja elemendid

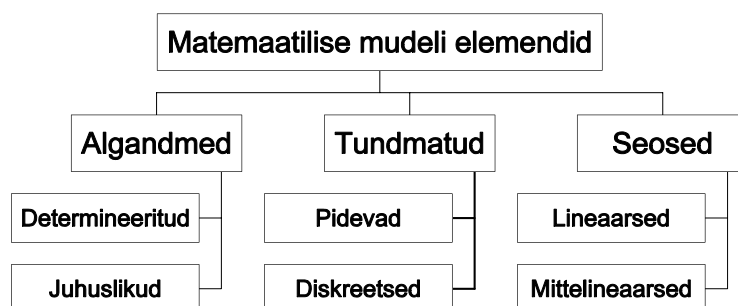
Teoreetilised mudelid võimaldavad uurida üldisemaid seaduspärasusi. **Rakenduslikud** mudelid võimaldavad hinnata konkreetse majandussubjekti funktsioneerimist ja formuleerida soovitusi praktiliseks tegevuseks.

Staatilised mudelid kirjeldavad objekti konkreetsel ajamomendil või perioodil. **Dünaamilised** mudelid sisaldavad ka ajalist muutust, võimaldavad kirjeldada protsesside dünaamikat.

Determineeritud mudelites on suuruste vahelised seosed ranged. **Stohhastilised** mudelid hõlmavad ka juhuslikke kõrvalekaldumisi ja neis kasutatakse tõenäosusteooria ning matemaatilise statistika meetodeid.

Tasakaalumudelid kirjeldavad tasakaalus olevavaid süsteeme. Tasakaalumudelitel on suur tähtsus makroökonomikas (näiteks nõudmise ja pakkumise tasakaal).

Optimeerimismudelid võimaldavad selgitada parimat lahendit, mis on kooskõlas juhtimiseesmärgi ja kitsendavate tingimustega. **Simuleerimismudelid** võimaldavad saada infot selle kohta, mis ühe või teise otsuse või valiku tulemusena võib juhtuda. "Mis siis, kui..." (*What if analysis*). Simuleerimismudeleid kasutatakse, kui optimeerimismudeleid pole võimalik konstrueerida.



Matemaatilise mudeli struktuur ja sisu

Matemaatiliste mudelite korral tuleb eristada nende matemaatilist kuju (struktuuri) ja mudelite sisu tõlgendamist, interpreteerimist.

NÄIDE 1.1. Lõppkapitali arvutamise mudel

Härral X on pangas tähtajalisel hoiusel 12 000 kr. Kui suur summa on tal pangaarvel aasta pärast, kui aastane intress on 9%? Võtame kasutusele järgmised tähistused

algkapital $K_0 = 12\,000$ kr
 aastaintress $r = 9\%$
 lõppkapital $K_1 = ?$

Seos lõppkapitali arvutamiseks

$$K_1 = K_0 + rK_0 = K_0(1+r)$$

Leiame lõppkapitali väärtuse

$$K_1 = 12000(1 + 0,09) = 12000 \cdot 1,09 = 13080$$

Vastus: Aasta pärast on pangaarvel 13 080 kr.

NÄIDE 1.2. Toodangukasvu mudel

Aasta algul oli tehase toodang 12000 toodet kuus. Uue tehnoloogia kasutuselevõtt suurendab tootlikkust 9%. Kui suur on kuu toodang peale tehnoloogia uuendamist?

Võtame kasutusele järgmised tähistused

esialgne tootmismahut $q_0 = 12\,000$ tootmismahu suurenemise määr $r = 9,5\%$ uus tootmismahut $q_1 = ?$	Seos uue tootmismahu arvutamiseks $q_1 = q_0 + r q_0 = q_0(1 + r)$ Leiame uue tootmismahu $q_1 = 12000(1 + 0,09) = 12000 \cdot 1,09 = 13080$
---	---

Vastus: Peale tehnoloogia uuendamist on tootmismahut 13 080 ühikut kuus..

Mõlema näite korral on mudelite matemaatiline kuju ühesugune:

$$X_1 = X_0(1 + r),$$

kokku langevad ka lähteandmete arväärtused. Erinev on aga mudelite poolt kirjeldatav majandussituatsioon ja saadud tulemuse interpreteerimine.

Probleemi lahendamisel ei piisa mudeli matemaatilise kuju kirjapanekust ja arvutuste sooritamisest, tingimata on vajalik ka saadud tulemuste tõlgendamine. Näiteks tekstülesande korral on alati vajalik välja kirjutada vastus.

2. FUNKTSIOONID JA NENDE ALGEBRA

Arvud ja nende hulgad

REAALARVUDE HULK

Loendamisel saadud arve nimetatakse **naturaalarvudeks**:

$$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes. See tähendab, et kahe naturaalarvu liitmisel või korrutamisel on tulemuseks alati naturaalarv. Naturaalarvude hulk ei ole kinnine lahutamise ja jagamise suhtes.

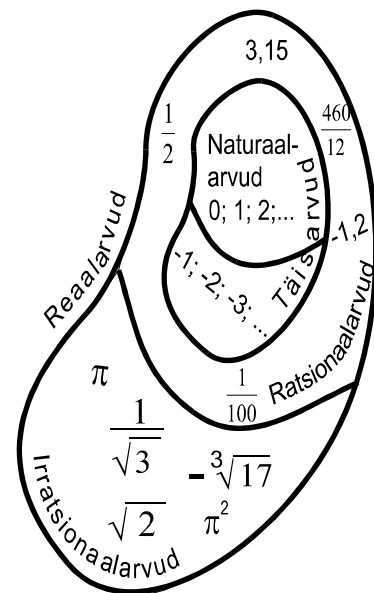
Täiendades naturalarvude hulka vastandavudega, saame

täisarvude hulga: $\mathbf{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$

Täisarvude hulk koosneb positiivsetest täisarvudest, negatiivsetest täisarvudest ja arvust 0. Arvu null ei loeta positiivseks ega negatiivseks.

Täisarvude hulk on kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes.

Negatiivsed arvud võeti esmakordelt kasutusele Indias võla, kahju, väljamineku märkimiseks.



Et mistahes kahe täisarvu jagamine oleks alati võimalik, on täisarvude huka laiendatud **murdarvudega**.

Joonis 5 Arvuhulgad

Täisarvud koos positiivsete ja negatiivsete murdarvudega moodustavad **ratsionaalarvude** hulga \mathbf{Q} . Seega ratsionaalarvud on arvud, mida saab esitada kahe täisarvu jagatisena:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Kõiki harilikke murde saab esitada kümnendmurruna, kusjuures tekib kas lõplik või lõpmatu perioodiline kümnendmurd. Näiteks $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{2}{3} = 0,66666\dots = 0,(6)$;

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571\dots = 0,(428571)$$

Ratsionaalarvude hulk on kinnine kõigi aritmeetiliste tehete suhtes. Iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel asub lõpmata palju ratsionaalarve.

Irratsionaalarvud on arvud, mida ei saa esitada täisarvude jagatisena. Näiteks $\sqrt{2}$, π , $\sin 15^\circ$. Need on lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Näiteks arvu π esimesed 500 kohta

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862\ 089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811\ 174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337\ 867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066\ 063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469\ 519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495\ 673518857527248912279381830119491...

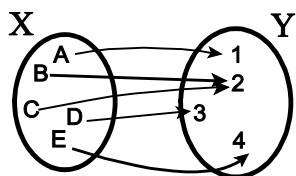
Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud kokku moodustavad **reaalarvude** hulga **R**.

Funktsionaalne sõltuvus

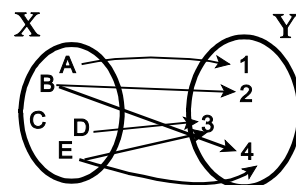
Vaatleme kaht hulka X ja Y . Seost, mille puhul igale elemendile $x \in X$ vastab **üks ja ainult üks** element $y \in Y$, nimetatakse **funktsionaalseks**.

Funktsiooni definitsioon ei nõua, et hulga Y iga element vastaks ainult ühele hulga X elemendile.

Näiteks ühesugune hind võib olla erinevatel kaupadel. Küll peab aga igale hulga X elemendile vastama üks ja ainult üks hulga Y element. Näiteks ühel ja samal kaubal ei saa olla korraga mitu erinevat jaehinda.



Joonis 6
On funktsioon



Joonis 7
Ei ole funktsioon

Esimese hulga elementi x nimetatakse **argumendiks** ja temale vastavat teise hulga elementi y selle argumendi **funktsiooniks**. Tähistused $y=f(x)$, $y=g(x)$, ...

Funktsiooni **määramispiirkond** on argumendi nende väärtuste hulk, mille korral funktsioon on määratud. Funktsiooni **muutumispiirkond** on funktsiooni väärtuste hulk.

NÄIDE 2.1. Nädala läbimüük kui funktsioon

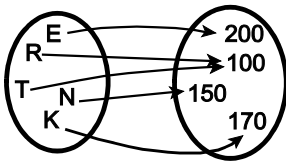
Tabelis 1 on toodud banaanide läbimüük. Igale nädalapäevale vastab üks konkreetne kilogrammide arv.

Tabel 1

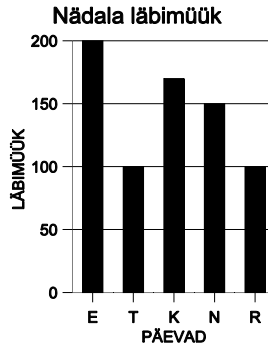
Päev	E	T	K	N	R
Läbimüük, kg	200	100	170	150	100

Sama funktsiooni võib esitada nooldiagrammi (joonis 8), tulpdigrammi (joonis 9) või joondiagrammina (joonis 10).

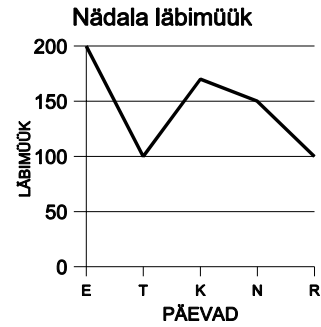
Nädala läbimüük



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

NÄIDE 2.2. Funktsiooni analüütiline kuju

Tabelis on toodud müüja palga sõltuvus poe läbimüügist. Tegemist on funktsionaalse sõltuvusega. Selle sõltvuse võib kirja panna ka kujul $y = 1500 + 0,05x$.

Viimast nimetatakse funktsiooni analüütiliseks esituseks.

Läbimüük x	Palk y
50000	4000
60000	4500
70000	5000
80000	5500
90000	6000

Funktsiooni esitusviisid

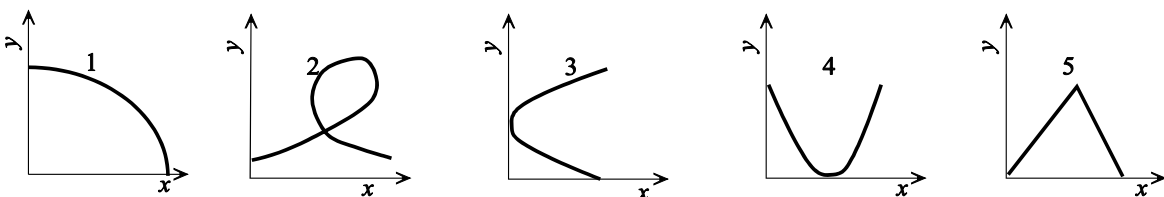
- ▶ tabeli abil
- ▶ graafiku abil
- ▶ analüütiline esitus
- ▶ nooldiagrammina
- ▶ sõnaline formuleering

Mitte igat funktsiooni ei saa esitada analüütiliselt, valemi abil (vt näide 2.1).

Majanduses kasutatava **matemaatilise modelleerimise** korral püütakse erinevate suuruste vahel valitsevaid seoseid kirjeldada analüütiliselt, valemi abil.

ÜLESANDED

2.1 Joonisel 11 on erinevatel graafikutel suuruse x väärtustele seatud vastavusse suuruse y väärtused. Millised graafikud kujutavad funktsionaalset sõltuvust $y=f(x)$?



Joonis 11

Astendamine. Polünoomid.

Kui n on positiivne täisarv, siis x^n tähendab, et x on iseendaga korrutatud n korda:

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x.$$

Astendamise reeglid

$$x^a(x^b) = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\sqrt[a]{x} = x^{1/a}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$$

NÄITEID

$$x^2(x^3) = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 \quad \text{ehk} \quad x^2(x^3) = x^{2+3} = x^5 ;$$

$$\frac{x^6}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = x \cdot x \cdot x = x^3 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3 ;$$

$$(x^4)^2 = (x \cdot x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8 \quad \text{ehk} \quad (x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^8$$

$$(xy)^4 = (xy)(xy)(xy)(xy) = x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y = x^4 y^4$$

Avaldises $5x^2$ on

x **muutuja**

5 kordaja ehk **koefitsient**.

Avaldist $5x^2$ nimetatakse **üksliikmeks**. Üksliige sisaldab kordajat ja üht või mitut muutujat.

Näiteks $23x$ $105x^2y^5$ $25x^3y\sqrt{z}$

Üksliikmete liitmisel ja lahutamisel saame **hulkliikme** ehk **polünoomi**

Näiteks $4x^3 + 5x^2 - 2x + 10$; $15x^4 - 3x^2 + 2x - 3$; $x^4 + 1$.

Polünoomiks ehk **hulkliikmeks** nimetatakse järgmist avaldist

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kus a_n, a_{n-1}, a_1 on polünoomi kordajad ja x muutuja.

Hulkliikme ühesuguseid liikmeid võib **liita** ja **lahutada**, liites või lahutades nende liikmete ees olevaid kordajaid.

Näiteks $4x^5 + 9x^5 = 13x^5$; $12xy - 3xy = 9xy$; $3x^3 + 5x^2 + 2y + 4x^3 + 7y = 7x^3 + 5x^2 + 9y$

Korrutamisel korrutatakse nii kordajaid kui muutujaid

Näiteks $(5x)(2y^3) = 10xy^3$ $(3x^3y^2)(4x^4y^4) = 12x^7y^6$

Jagamisel jagatakse nii kordajaid kui muutujaid

$$\text{Näiteks} \quad \frac{15x^4y^3z^6}{3x^2y^2z^3} = 5x^2yz^3 \quad \frac{4x^2y^5z^3}{8x^5y^3z^4} = \frac{y^2}{2x^3z}$$

Kahe hulkliikme korrutamisel korrutatakse esimese hulkliikme iga liige läbi teise hulkliikme iga liikmega ja saadud avaldised liidetakse

$$\text{Näiteks} \quad (6x+7y)(4x+9y) = 24x^2 + 54xy + 28xy + 63y^2 = 24x^2 + 82xy + 63y^2$$

Ühise teguri toomisega sulgude ette jagatakse kõik liikmed läbi nende suurima ühisteguriga

$$\text{Näiteks} \quad 8x^3 - 24x^2 = 8x^2(x-3) \\ 15x^4y^2 - 45x^2y^2 + 5x^3y^3 = 5x^2y^2(3x^2 - 9 + xy)$$

ÜLESANDED

2.2 Lihtsusta!

a) x^4x^5	b) $x^2x^{1/2}$	c) $(5x)(13y^2)$
d) x^7x^{-3}	e) $x^6\sqrt{x}$	f) $(7x^3y^5)(4x^2y^4)$
g) $x^{-2}x^{-4}$	h) $\sqrt[3]{x^4}\sqrt{x}$	i) $\sqrt[5]{y^7}\sqrt[7]{y}$

2.3 Leida funktsioonide f ja g summa $f+g$, vahe $f-g$ ja korrutis fg

a) $f(x) = 4x - 7$	$g(x) = 2x + 6$
b) $f(x) = 10x^2 + 2x + 1$	$g(x) = 5x - 5$
c) $f(x) = -4x^2 - 2x$	$g(x) = 10x$
d) $f(x) = 3x + 1$	$g(x) = -2x$

2.4 Lihtsusta!

a) $\frac{x}{\sqrt{x}}$	b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$	c) $\frac{x^2y^3}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}}$	d) $\frac{12x^2+3x}{4x+1}$
-------------------------	--	---	----------------------------

Kulu-, tulu- ja kasumifunktsioon.

Matemaatiliste meetodite kasutamisel majandusprotsesside analüüsimisel puututakse kokku mitmesuguste funktsioonidega. Mikroökonomikast on tuntuimad kulu-, tulu- ja kasumifunktsioon ning nõudlus- ja pakkumisfunktsioon.

Kulufunktsioon on funktsionaalne seos tootmismahu (tegevuse mahu) q (*quantity*) ja kulude C (*cost*) vahel. Kulufunktsioon koosneb kahest komponendist – fikseeritud kuludest ja muutuvkuludest.

Kulufunktsioon = fikseeritud kulud + muutuvkulud

$$C(q) = C_F + c_v q$$

kus	q	on tootmismahu;
	C_F	on fikseeritud kulud;
	c_v	on muutuvkulu tooteühiku kohta.

- **Fikseeritud kulud** ehk **püsikulud** on kulud, mis ei sõltu toodangu mahust. Näiteks rent, büroootõtjate palgad jms. Fikseeritud kulud antakse kindla ajavahemiku (aasta, kuu) kohta.
- **Muutuvkulud** on kulud, mille suurus sõltub otseselt toodangu mahust. Näiteks kulud materjalile, töötasu.

NÄIDE 2.3. Kulufunktsioon

Olgu ühe ajalehe trükkimiseks tehtavad muutuvkulud 6 kr. Fikseeritud kulud päevas on 3000 kr.

- a) Leiame kulufunktsiooni $C(q)$, mis kirjeldaks päevas tehtavate kulutuste sõltuvust ajalehede arvust (tootmismahust) q .
 Vastus: Kulufunktsioon on $C(q) = 3000 + 6q$.
- b) Leiame summaarsed kulud 100 ajalehe trükkimisel päevas:
 $C(100) = 3000 + 6 \cdot 100 = 3000 + 600 = 3600$
 Vastus: 100 ajalehe trükkimisel tehtavad kulutused on 3600 kr päevas.
- c) Leiame summaarsed kulud 3000 ajalehe trükkimisel päevas:
 $C(3000) = 3000 + 6 \cdot 3000 = 3000 + 18000 = 21000$
 Vastus: 3000 ajalehe trükkimisel tehtavad kulutused on 21 000 kr päevas.

Kulufunktsiooni teadmine võimaldab leida kogukulusid suvalise tootmismahu korral. Sobiv on selleks kasutada tabelarvutust:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Fikseeritud kulud	3000						
2	Muutuvkulud ühiku kohta	6						
3								
4	Tootmismah	Kogukulud						
5	100	3600						
6	500	6000						
7	1000	9000						
8	3000	21000						
9								

=fikseeritud_kulud+muutuvkulud_ühiku_kohta*A5

Teades funktsiooni kuju, võime me selle funktsiooni **tabuleerida**: leida funktsiooni väärtuse erinevate argumentide väärtuste korral.

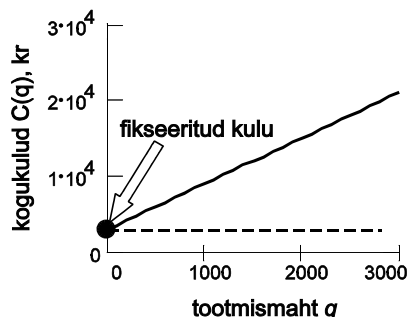
Tabelarvutust kasutades võime me muuta ka algandmeid, "läbi mängides" erinevaid võimalusi, uurida "mis juhtub, kui..". Näiteks võime leida, kuidas muutuvad summaarsed kulud, kui õnnestub vähendada fikseeritud kulusid 2500 kroonini päevas või kui muutuvkulud ühiku kohta suurenevad

	A	B
1	Fikseeritud kulud	2500
2	Muutuvkulud ühiku kohta	6
3		
4	Tootmismah	Kogukulud
5	100	3100
6	500	5500
7	1000	8500
8	3000	20500
9		

	A	B
1	Fikseeritud kulud	3000
2	Muutuvkulud ühiku kohta	7
3		
4	Tootmismah	Kogukulud
5	100	3700
6	500	6500
7	1000	10000
8	3000	24000
9		

7 kroonini.

Peale kulufunktsiooni tabuleerimist võime kulude muutumise iseloomustamiseks kasutada graafikut.



Joonis 15 Kulufunktsiooni graafik

Müües teenust või toodet, saab firma tulu (*revenue*). Tulufunktsioon on funktsionaalne seos müüdüd tooteühikute (või tegevusmahu) ja brutotulu R vahel. Lihtsaimal juhul on seos võrdeline ja võrdeteguriks on hind (*price*) p .

Tulufunktsioon = nõutav kogus · hind

$$R(q) = q \cdot p$$

kus q on nõutav kogus (tootmismahd)
 p on tooteühiku hind

Et tulufunktsioon oleks reaalselt interpreteeritav, peavad kehtima tingimused $q > 0$; $p > 0$ (kogus ja hind on positiivsed).

NÄIDE 2.4. Tulufunktsiooni leidmine

Juku müüb koolis mudelautosid hinnaga 5 kr tükk. Leida tulufunktsioon, mis kirjeldab müügist saadud tulu sõltuvust müüdüd autode arvust q .

Vastus: Tulufunktsioon on $R(q) = 5q$.

Firma tegevuse üheks põhieesmärgiks on kasumi (*profit*) maksimeerimine. Kasum P on tulud miinus kulud.

Kasumifunktsioon = tulufunktsioon - kulufunktsioon

$$P(q) = R(q) - C(q),$$

kus: q on tegevuse maht;
 $P(q)$ on kasumifunktsioon;
 $R(q)$ on tulufunktsioon;
 $C(q)$ on kulufunktsioon.

Kasumifunktsiooni asemel kasutatakse mõnikord ka terminit **puhastulufunktsioon**.

NÄIDE 2.5. Kasumifunktsiooni leidmine

Olgu meil leitud firma kulufunktsioon

$$C(q) = 40q + 1500.$$

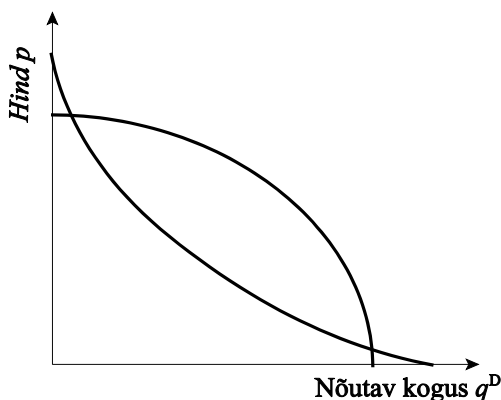
ja tulufunktsioon

$$R(q) = 55q$$

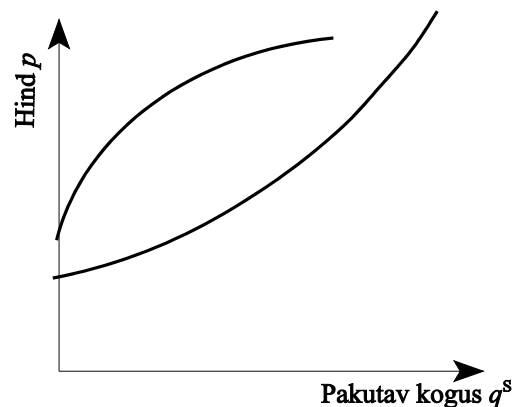
Kasum on tulude ja kulude vahe:

$$P(q) = R(q) - C(q) = 55q - (40q + 1500) = 15q - 1500.$$

Toote nõudlus (*demand*) ja toote hind on omavahel seotud. **Nõudlusfunktsioon** on funktsionaalne seos nõutava koguse ja hinna vahel. Normaalse nõudluse korral nõutav kogus suureneb hinna



Joonis 16 Nõudlusfunktsioone



Joonis 17 Pakkumisfunktsioone

kahanemisel, järelikult nõudlusfunktsioon on **kahanev funktsioon** (joon 16).

Märkus: Ajalooliselt on majandusteadlased harjunud hinda esitama vertikaalteljel ja kogust horisontaalteljel ning majanduslase kirjandusega parema võrreldavuse huvides on ka siin nõudlusfunktsiooni graafikutele seda järgitud.

Toote pakkumine (*supply*) ja hind on samuti seotud. **Pakkumisfunktsioon** on funktsionaalne seos pakutava koguse ja hinna vahel. Mida kõrgem on hind, seda rohkem kaupa pakutakse. Pakkumisfunktsioon on **kasvav funktsioon** (joon. 17).

Majandusmodelite uurimisel eeldatakse tihti, et nõudlusfunktsioon ja pakkumisfunktsioon on lineaarsed.

Lineaarne nõudlusfunktsioon

$$p(q^D) = b + a q^D$$

kus p on hind;
 q^D on nõutav kogus;
 a, b on arvud.

Nõutava koguse kasvades hind väheneb. Seepärast peab $a < 0$.

Kui nõutav kogus on 0, on tegemist piirhinnaga, mis ollakse valmis selle toote eest maksma. Kuna hind peab olema positiivne, siis $b > 0$ (sest $p(0) = b$).

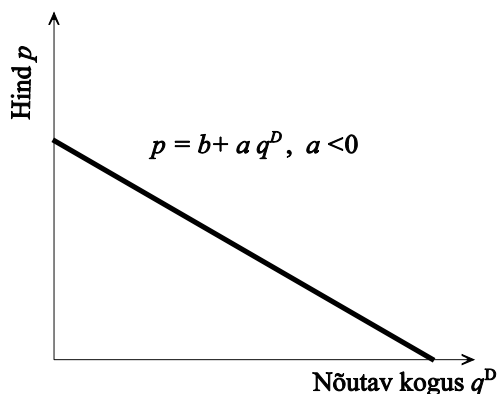
Joonisel 18 on toodud lineaarse nõudlusfunktsiooni graafik.

Lineaarne pakkumisfunktsioon

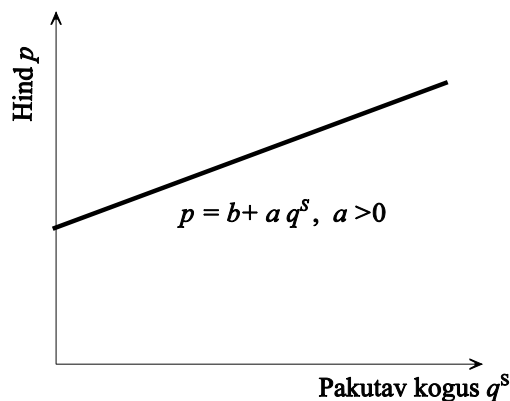
$$p(q^S) = b + a q^S$$

kus p on hind;
 q^S on pakutav kogus;
 a, b on arvud.

Kuna hinna kasvades pakutav kogus suureneb, peab pakkumisfunktsiooni korral $a > 0$.



Joonis 18 Lineaarne nõudlusfunktsioon



Joonis 19 Lineaarne pakkumisfunktsioon

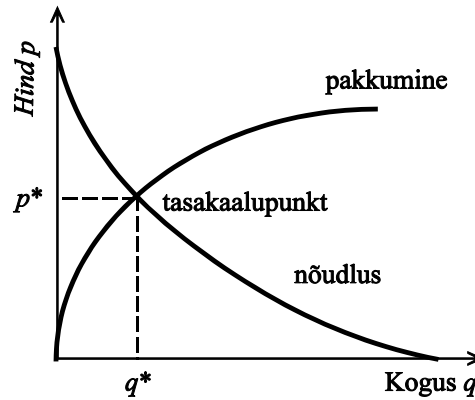
Joonisel 19 on toodud lineaarse pakkumisfunktsiooni graafik.

Siin tegime vahet nõutava koguse q^D ja pakutava koguse q^S vahel. Edaspidi eeldatakse enamikes ülesannetes (kui ei ole muud mainitud), et turul valitseb **tasakaal**, s.t. :

$$\begin{aligned} \text{nõutav kogus} &= \text{pakutav kogus} \\ q^D &= q^S = q \end{aligned}$$

Turutasakaal on toodud

joonisel 20. Hinda p^* , mille korral tasakaal saavutatakse, nimetatakse **tasakaaluhinnaks**.



Joonis 20 Turutasakaal

ÜLESANDED

2.5 Kulud ruumide rendile ja kontoritöötajate töötasule on kuus 5500 kr. Ühe toote tootmiskulud on 600 kr. Leida

- firma kulufunktsioon;
- summaarsed kulud kuus 100 toote valmistamisel.

2.6 Millised järgmistest funktsioonidest ei saa olla kulufunktsioonid? Miks?

- $C(q) = -25q + 4000$;
- $C(q) = 75q - 5000$;
- $y(x) = 0,1x + 4200$.

2.7 Ventilator pannakse kokku mootorist, tiivikust ja korpusest. Mootorite jaoks tehtavad kulutused n ventilatori valmistamisel on $f(n) = 300n + 4000$ ja tiiviku ning korpuse jaoks tehtavad kulutused n ventilatori valmistamisel on $g(n) = 200n + 3000$. Leida:

- funktsioon $C(n)$, mis kirjeldaks summaarseid kulusid n ventilatori valmistamisel;
- summaarsed kulud 150 ventilatori valmistamiseks.

2.8 Kaubavarude tellimisprotsessi analüüs on näidanud, et tellimuse koordineerimiseks ja vormistamiseks kulub ligikaudu 15 tundi tööaega sõltumata tellimuse suuruselt. Tellimuste vormistamisega tegeleva töötaja töötasuks kulub 110 kr töötunni kohta. Kulude analüüs näitas, et 50 tellimuse kohta kulus 14500 kr paberi, postikulude ja telefonikõnede peale. Ühe partii kättetoimetamistasu on 700 kr. Leida

- ühe partii hankekulud;
- kogukulud ühe partii kohta (hankekulud + kauba maksumus), kui hangitava kauba hind on 55 kr.

2.9 Kirjutada välja firma tulufunktsioon, kui toote hind on 25kr.

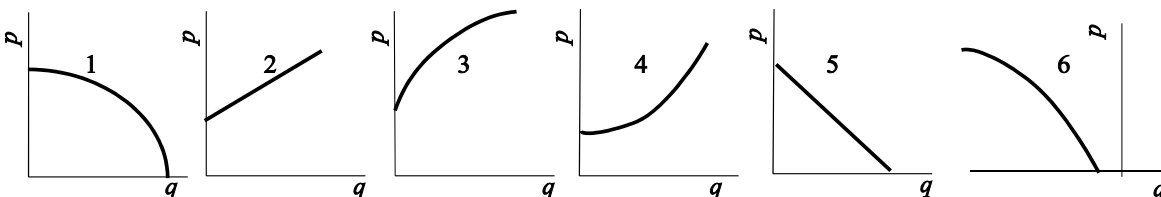
2.10 Firma tootmiskulud q toote valmistamisel avalduvad järgmiselt: $C(q) = 5q + 100\,000$.

Saadav tulu on $R(q) = 7q$.

Leida:

- kuidas kasum sõltub tootmismahust (toodete arvest) q ;
- kui suur on kasum 60 000 toote valmistamisel.

2.11 Leia, millised joonisel 21 toodud graafikutest võivad kirjeldada nõudlusfunktsiooni, millised pakkumisfunktsiooni.



Joonis 21

2.12 Leida, milline järgnevatest funktsioonidest võib olla nõudlusfunktsioon, milline pakkumisfunktsioon:

a) ;

b) $p(q) = 500 + 25q$;

c) $p(q) = -1500 - 60q$.

2.13 Leida firma tulufunktsioon, kui toote hind p sõltub kogusest q järgmiselt: $p(q) = 2500 - 30q$.

2.14 On antud firma kulufunktsioon $C(q) = 20 + 4q$, kus q on tootmismah. Hind p sõltub nõutavast kogusest järgmiselt: $p(q) = 22 - 4q$. Leida avaldis firma kasumi arutamiseks.

2.15 Muutuvkulu ühe toote kohta on 4 kr. Lisaks sellele kulub kuus 11000 kr ruumide rentimiseks ja 20000 kr kontoritöötajate palkadeks. Leida firma kulufunktsioon.

2.16 Leida firma tulufunktsioon, kui pakutakse teenust hinnaga 120 kr tund.

2.17 On antud firma kulufunktsioon $C(q) = 55q + 5000$, kus q on toodete kogus. Hinna p ja nõutava koguse vaheline seos on $p(q) = 500 - 45q$. Leida avaldis firma kasumi arutamiseks.

Kasumifunktsioon lineaarse nõudlus- ja kulufunktsiooni korral.

NÄIDE 2.6. Tulu- ja kasumifunktsiooni leidmine.

Firma kulude analüüs näitas, et ühe kuu tootmiskulud on $C = 5q + 200$, kus q on tootmismah. Nõudluse analüüs näitas, et nõudlusfunktsioon on lineaarne ja avaldub kujul $p = 50 - 1,25q$, kus p on hind. Leida firma tulu- ja kasumifunktsioonid.

Lahendus: Tulufunktsiooni saame hinnaavaldise asendamisega tulufunktsiooni valemisse:

$$R = qp = q(50 - 1,25q) = 50q - 1,25q^2$$

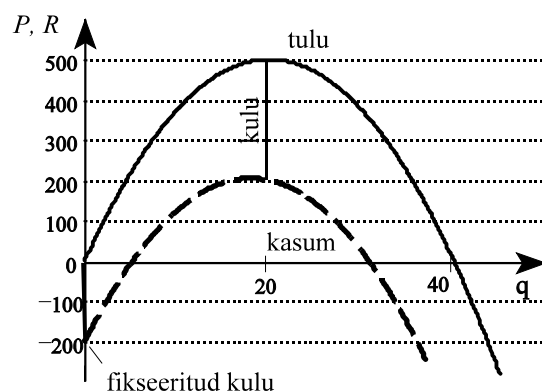
Kasumifunktsiooni leidmiseks asendame kasumivalemis tulu- ja kulufunktsioonid nende avaldistega:

$$P = R - C = (50q - 1,25q^2) - (5q + 200) = -1,25q^2 + 45q - 200$$

Vastus: Firma tulufunktsioon on $R = 50q - 1,25q^2$ ja

kasumifunktsioon $P = -1,25q^2 + 45q - 200$.

Vastavate funktsioonide graafikud on toodud joonisel 22. Graafikute analüüsimisel näeme, et tootmismahu 20 korral on tulu maksimaalne ja $R(20) = 500$. Kasum on siis 200 ühikut. Kasum on maksimaalne tootmismahu 18 korral ja maksimaalne kasum P_{\max} on 205 ühikut.



Joonis 22 Tulu ja kasumi graafikud

Uurime tulu- ja kasumifunktsioone üldisel juhul, lineaarse kulu- ja nõudlusfunktsiooni korral.

Olgu kulufunktsioon

$$C = c_v q + C_F, \quad c_v > 0, \quad C_F > 0,$$

kus q on tootmismah, c_v muutuvkulu ühiku kohta ja C_F fikseeritud kulu.

Lineaarse nõudlusfunktsioon kirjutame kujul

$$p = aq + p_0, \quad a < 0, \quad p_0 > 0,$$

kus p on hind ja p_0 piirhind (hind, mille korral nõutav kogus on 0). Leiame tulu- ja kasumifunktsioonid üldkujul.

Tulufunktsioon:

$$R = qp \quad \text{asendame hinna vastava avaldisega}$$

$$R = q(aq + p_0)$$

$$R = aq^2 + p_0q.$$

Lineaarse kulu- ja nõudlusfunktsiooni korral on tulufunktsioon ruutpolünoom, mille

- ▶ ruutliikme ees olev kordaja on negatiivne ($a < 0$);
- ▶ lineaarliikme ees olev kordaja on positiivne ($p_0 > 0$).
- ▶ vabaliige puudub (kui tootmismah q on null, ei saada ka tulu).

Sellise funktsiooni graafik on allapoole avanev parabool. Matemaatikast on teada, et kui parabooli võrrand on $y = ax^2 + bx + c$, siis tippu x koordinaadi saab leida valemist $x = -\frac{b}{2a}$. Seega tulugraafiku

$$\text{tipp asub kohal } q = -\frac{p_0}{2a}.$$

Kasumifunktsioon:

$$\begin{aligned} P &= R - C && \text{asendame tulu ja kulu nende avaldistega} \\ P &= (aq^2 + p_0q) - (c_vq + C_F) \\ P &= aq^2 + (p_0 - c_v)q - C_F \end{aligned}$$

Lineaarse kulu- ja nõudlusfunktsiooni korral on kasumifunktsioon ruutpolünoom, mille

- ▶ ruutliikme ees olev kordaja on negatiivne ($a < 0$);
- ▶ vabaliige on negatiivne ($C_F > 0$).

Graafik on allapoole avanev parabool, mille tipp (kasumi maksimum) asub kohal $q_{\text{optimaalne}} = \frac{c_v - p_0}{2a}$.

ÜLESANDED

2.18 FIRMAL õnnestub ära müüa kogu toodang, kusjuures q toote tootmisel nädalas on kogukulud $300q + 2000$. Nõudluse analüüs näitab, et nõudlust kirjeldab mudel $500 - 2q$.

- a) Leida tulufunktsioon ja kasumifunktsioon.
- b) Arvutada kasumi väärtus koguste 40 ja 100 korral.
- c) Leida optimaalne tootmismahut ja maksimaalne kasum.

2.19 Millised järgmistest avaldistest võivad kirjeldada kasumifunktsiooni?

- a) $-5q^2 + 60q + 7000$;
- b) $-20q^2 + 100q - 15000$;
- c) $1,5q^2 + 100q - 15000$.

2.20 Kulude analüüs näitas, et fikseeritud kulud nädalas on 8000 krooni ja muutuvkulu tootetühiku kohta on 500 krooni.

Nõudluse analüüsil saadi nõudlusfunktsiooniks $p(q) = -0,71q + 1000$, kus p on hind ja q tootmismahut. Leida

- a) kasumi sõltuvus tootmismahust;
- b) kasumi suurus tootmismahu korral 300 toodet nädalas,
- c) optimaalne tootmismahut ja maksimaalne kasum.

Liitfunktsioon.

NÄIDE 2.7. Liitfunktsioon

Linnas sõltub keskmine autoga liikumise kiirus v autode arvust N , $v = v(N)$. Autode arv N sõltub aga inimeste keskmisest sissetulekust S , $N = N(S)$. Seega kaudselt sõltub liikumiskiirus v inimeste keskmisest sissetulekust S :

$$v = v(N(S)) = v(S).$$

Olgu meil kaks funktsiooni f ja g defineeritud järgmiselt:

$$f(g) = g^2 \quad \text{ja} \quad g(x) = x + 1.$$

Siis liitfunktsioon

$$f(g(x)) = g^2 = (x + 1)^2.$$

Selliseid funktsioone, kus argumendi ja funktsiooni seos on antud kahe või enama sõltuvuste ahela kaudu, nimetatakse **liitfunktsioonideks**.

$$z = f(y), y = g(x) \quad \Rightarrow \quad z = h(x)$$

ÜLESANDED

2.21 Avalda funktsioon f muutuja x funktsioonina.

- a) $f = g^2$ ja $g = 3x - 1$;
- b) $f = g + 1$ ja $g = x^3$;
- c) $f = g^2 - 2g + 2$ ja $g = 2x - 1$;
- d) $f = \sqrt{g}$ ja $g = \frac{2x - 1}{3 - x}$;
- e) $f = g^2$, $g = u - 3$ ja $u = 2x - 1$

2.22 Nõudlus toote järele sõltub selle hinnast:

$$q(p) = 400p^2 + 3500p + 2000,$$

kus p on toote hind kroonides. Prognoos näitab, et lähitulevikus toote hind väheneb järgmise seaduse kohaselt:

$$p(t) = \frac{50}{t+15}$$

kus t on aeg kuudes alates praegusest. Leida funktsioon, mis kirjeldab nõudluse sõltuvust ajast. Milline on nõutav kogus praegu? Milline on nõutav kogus 3 kuu pärast?

2.23 Epideemia levib epitsentrist igas suunas kiirusega 20 km päevas. Avaldada epideemia poolt haaratud piirkonna pindala sõltuvus päevade arvust. Kui suur maa-ala on epideemiast haaratud 5 päeva pärast?

2.24 Vingugaasi kontsentratsioon linnaõhus sõltub päevas liikvel olevate autode arvust n : $c(n) = 10^{-9}n^2 + 10^{-5}n + 1$. Autode arv muutub seaduse $n(t) = 10\,000t^2 + 150\,000$ järgi, kus t on aeg aastates ($t = 0$ vastab 1993.a.). Leida vingugaasi kontsentratsiooni sõltuvus ajast. Kui suur on vingugaasi kontsentratsioon aastal 1997?

ÜLESANNETE VASTUSED

2.1 1, 4, 5 2.2 a) x^9 ; b) $\sqrt{x^5}$; c) $65xy^2$; d) x^4 ; e) $\sqrt{x^{13}}$; f) $28x^5y^9$; g) $\frac{1}{x^6}$; h) $\sqrt[12]{x^7}$; i) $\sqrt[35]{x^{12}}$. 2.4 a) \sqrt{x} ; b) $\sqrt[3]{x}$;

c) $\sqrt{x^3} \sqrt[3]{y^8}$; d) $3x$ 2.5 a) $C(q) = 5500 + 600q$; b) 65500 kr. 2.6 a) ja b). 2.7 a) $C(n) = 500n + 7000$; b) 82000 kr. 2.8 a) 2640 kr; b) $55n + 2640$, kus n on partiis olevate kaupade hulk. 2.9 $R(q) = 25q$ 2.10 a) $P(q) = 2q - 100\,000$; b) 20000 kr. 2.13 $p(q) = 2500q - 30q^2$. 2.14 $P(q) = -4q^2 + 18q - 20$. 2.15 $C(q) = 4q + 31\,000$ 2.16 $R(q) = 120q$, kus q on tundide arv. 2.17 $P(q) = -45q^2 + 445q - 5000$. 2.18 a) $R = 500q - 2q^2$, $P = -2q^2 + 200q - 2000$; b) $P(40) = 2800$, $P(100) = -2000$; c) $q_{\text{opt}} = 50$, $P(50) = 3000$ 2.19 Avaldis b). 2.20a) $P(q) = -0,71q^2 + 500q - 8000$, b) $P(300) = 78\,100$ kr nädalas., c) $q_{\text{opt}} = 352$, $P(352) = 80028$. 2.22 Praegu 18111 ühikut, kolme kuu pärast 14809 ühikut. 2.23 Pindala $S(t) = 400\pi t^2$, kus t on päevade arv. $S(5) = 31416$ km². 2.24 100,2 ühikut.

3. VÕRRANDID

Lineaarsed võrrandid. Tasuvusanalüüs.

NÄIDE 3.1. Tasuvusanalüüs.

Olgu firma kulufunktsioon $C(q) = 5q + 100\,000$ ja

tulufunktsioon $R(q) = 7q$, kus q on tootmismah.

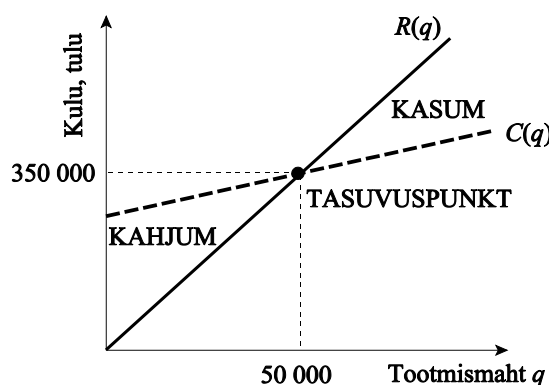
Leida tootmismah, mille korral tulud on võrdsed kuludega.

Lahendus:

$$\begin{aligned} C(q) &= R(q) \\ 5q + 100\,000 &= 7q \\ -2q &= -100\,000 \\ q &= 50\,000 \end{aligned}$$

Kontroll:

$$\begin{aligned} C(50\,000) &= 5 \cdot 50\,000 + 100\,000 = 350\,000 \\ R(50\,000) &= 7 \cdot 50\,000 = 350\,000 \end{aligned}$$



Vastus: Tulud ja kulud on võrdsed tootmismahu 50000 korral.

Joonis 23

Sellist analüüsi nimetatakse **tasuvus-** ehk **rentaablusanalüüsiks** (*break-even analysis*).

Tasuvuspunkt (*break-even level*) on tootmismah, mille juures ettevõtte "tuleb omadega välja", kattes kõik kulud, kuid saamata kasumit.

Selles näites tuli lahendada võrrand $5q + 100\,000 = 7q$, see tähendab, tuli leida tundmatu q selline väärtus, mille korral võrdus kehtiks. Võrrandit, kus tundmatu suuruse suurim aste on 1, nimetatakse **linearseks võrrandiks**. Seega lineaarse võrrandi korral ei esine selliseid liikmeid, mis sisaldavad x^2, x^3, \dots .

Võrrandite lahendamisel kasutatakse järgmisi võrduse omadusi:

1. Võrduse mõlemale poolele võib liita ühe ja sama arvu:

$$\begin{array}{l} a = b \quad | +c \\ a + c = b + c \end{array}$$

2. Võrduse mõlemast poolest võib lahutada ühe ja sama arvu

$$\begin{array}{l} a = b \quad | -c \\ a - c = b - c \end{array}$$

3. Võrduse mõlemaid pooli võib korrutada ühe ja sama arvuga:

$$\begin{array}{l} a = b \quad | \cdot c \\ a \cdot c = b \cdot c \end{array}$$

4. Võrduse mõlemaid pooli võib jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga:

$$\begin{array}{l} a = b \quad | :c, \quad c \neq 0 \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \end{array}$$

NÄIDE 3.2. Kumb teenustepakkuja valida?

Mobiilsideoperaator A pakub hinnapaketti, kus kuumaks on 59 kr ja kõneminuti hind 2.75. Operaatori B pakkumises kuumaksu pole ja kõneminuti hind on 8 kr. Kui suure kõneminutite arvu korral kuus tasub valida operaatorfirma B?

Lahendus. Firma A korral on kulud kõnedele

$$C_A = 59 + 2,75t$$

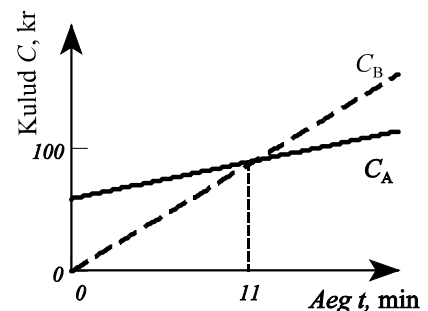
kus t on kõneminutite arv kuus. Firma B korral on kulud kõnedele

$$C_B = 8t$$

Kriteeriumiks on kõneminutite arv kuus, mille korral kulud on ühesugused.

Leiame selle:

$$\begin{aligned} C_A &= C_B \\ 59 + 2,75t &= 8t \\ -5,25t &= -59 \\ t &= \frac{-59}{-5,25} \\ t &= 11,24 \end{aligned}$$



Joonis 24

Vastus: Kulud on ühesugused, kui kõneminuteid on kuus ligikaudu 11. Kui üldse mitte kõnelda ($t=0$), on soodsam firma B pakkumine. Järelikult tuleks valida firma B, kui kõneldakse alla 11 minuti kuus.

ÜLESANDED

3.1 Lahendada järgmised võrrandid

a) $3x + 5 = 11$;

b) $\frac{x}{2} - 3 = 1$;

c) $2x - 3b = 4$ suuruse x suhtes (avaldada x);

d) $I = nrt$ suuruse t suhtes;

e) $y = mx + b$ suuruse x suhtes.

3.2 Koostada võrrand ja lahendada see:

a) Arvule x liideti tema kahekordne ja saadi 42.

b) Arvust 42 lahutati arv y , saadud tulemust korrutati 3-ga ja saadi 96.

c) Arvu x korrutati 6-ga, tulemusele liideti arvude x ja 9 summa ning saadi 44.

3.3 Üks klient toob keskmiselt sisse 60 kr. Mitu klienti päevas tuleks teenindada, et tulu päevas oleks 1500 kr?

3.4 Naisel kulus juuksuris kolm korda rohkem raha kui mehel. Kokku kulus neil raha 140 kr. Koostada võrrand. Mitu krooni kulutas juuksuri peale mees, mitu naine?

3.5 Kirjeldagu toote nõudlust turul nõudlusfunktsioon $q^D(p) = -1000p + 120000$ ja pakkumist funktsioon $q^S = 500p$,

kus p on toote hind kroonides. Leida hind, mille korral nõudmine ja pakkumine on tasakaalus.

3.6 Firma püsikulud kuus on 25 tuhat krooni. Muutuvkulu ühe toote kohta on 700 krooni. Kui suurt tootmistahtu võib kuus planeerida, kui summaarsed kulud võivad olla 375 tuh. kr?

3.7 Firmas A, mis tegeleb autode rentimisega on hind 250 kr pluss 6 kr kilomeeter. Firmas B tuleb maksta 300 kr pluss 5 kr km. Leida kriteerium, millal üürida ühest, millal teisest firmast.

3.8 1970. aastal pakkus USA telefonikompanii Bell Systems oma klientidele kahte erinevat arveldusvõimalust. Kuutasu 7,5\$ võimaldas piiramatut kõnede arvu kuus. Teine võimalus oli kuutasu 5\$ kuus, mis võimaldaspidada kuni 50 kõnet ja iga järgmise kõne eest 0,05\$. Ligikaudu 50% nendest klientidest, kelle kõnede arv oli alla 50, valisid esimese variandi.¹ Aga kui suure kõnede arvu korral kuus tuleks valida esimene variant?

3.9 Tootja müüb toodet hinnaga 80 kr tükk. Kulud koosnevad fikseeritud kuludest 4500 kr pluss muutuvkulust 50 kr iga toote kohta. Leida

- palju peab tootma, et tulud kataksid kulud;
- kui suur on kahjum, kui toodetakse ja müüakse 100 ühikut;
- kui palju peab tootma, et saada kasumit 900 kr.

3.10 Tootmise planeerimisel on firmal valida ühe toote kahe variandi vahel. Variandi A korral on püsikulud aastas 4 000 000 kr ja muutuvkulu 5 kr ühiku kohta. Variandi B püsikulud on 2 000 000 kr ja muutuvkulu 7 kr ühiku kohta. Mõlema variandi korral on hinnaks 20 kr. Missuguste tootmistahtude juures on üks või teine variant kasulikum.?

3.11 Torumees Juhan küsib tasu 250 kr pluss 160 kr tunnist. Teine torumees Karla küsib 310 kr pluss 140 kr tunnist. leida kriteerium, kumba torumeest kutsuda?

3.12 Toote nõudlust turul kirjeldab toote nõudlusfunktsioon $q^D(p) = -12000p + 200000$ ja pakkumist pakkumist funktsioon $q^S = 8000p$, kus p on toote hind. Leida hind, mille korral nõudmine ja pakkumine on tasakaalus.

3.13 Kompanii fikseeritud kulu on 100 000 kr, muutuvkulu 6 krooni ühiku kohta ja iga toote müümisel saadakse tulu 10 kr. Leida

- toodete arv, mille korral tulud katavad kulud;
- millise tootmismahu korral on kasum 500 000 kr?

3.14 Kursuste hind on 600 kr osavõtja kohta. Analüüs näitab, et kulud kursustele on 6000 kr püsikulu pluss veel 200 kr iga osavõtja kohta. Mitu osavõtjat peaks olema, et kursused ei tooks kahjumit?

3.15 Juhan ja Anni soovivad korteri ostmiseks raha säästa. Nad otsustavad säästa ühe neljandiku oma sissetulekust. Juhan teenib 50 kr tunnis ja Anni 35 kr tunnis ning kuus soovivad nad kõrvale panna 4000 kr. Mitu tundi nädalas peab kumbki töötama, kui nad töötavad ühepalju tunde?

3.16 Et objekt valmiks ettenähtud tähtajaks, tuli iga päev teha 150 töötundi. Tegelikult oli töötundide arv päevas 30 võrra suurem ja seetõttu lõpetati objekt 3 päeva varem. Mitu päeva kulus objekti valmimiseks?

Ruutvõrrandid

Ruutvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus otsitava suuruse suurim aste on 2. Ruutvõrrandi lahendamiseks tuleb kõik liikmed viia vasakule poole võrdusmärki (paremale poole jääb 0) ja kasutada ruutvõrrandi lahendivalemeid.

Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks lahendit:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tihti on kasulik ruutvõrrandi mõlemad pooled läbi jagada ruutliikme ees oleva kordajaga a . Sellisel juhul saadakse **taandatud ruutvõrrand**:

¹Cosgrove, J. G., and Linhart, P. B. (1979). Customer choices under local measured telephone service. Public Utilities Fortnightly, Aug. 30, 27-31.

Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

NÄIDE 3.3. Tasuvuspunktid.

Olgu meil leitud ettevõtte kasumi P sõltuvus hinnast p järgmisel kujul:

$$P(p) = -40p^2 + 16000p - 1200000$$

Leida

- a) Millise hinna korral on kasum null?
b) Millise hinna korral on kasum 300 000 kr?

Lahendus:

- a) Et leida, millise hinna korral on kasum null, paneme kasumi võrduma nulliga:

$$P(p) = 0$$

Järgnevalt asendame kasumi selle avaldisega ja lihtsustame saadud ruutvõrrandi:

$$\begin{aligned} -40p^2 + 16000p - 1200000 &= 0 & | :(-40) \\ p^2 - 400p + 30000 &= 0 \end{aligned}$$

Kasutades ruutvõrrandi lahendi valemit saame:

$$p_1 = -\frac{-400}{2} - \sqrt{\left(\frac{400}{2}\right)^2 - 30000} = 100$$

ja teine lahend

$$p_2 = -\frac{-400}{2} + \sqrt{\left(\frac{400}{2}\right)^2 - 30000} = 300 .$$

Seega tasuvuspunkte on kaks: 100 kroonise ja 300 kroonise hinna juures.

- b) Kui kasum on 300 000 kr, siis

$$P(p) = 300000$$

Asendame jällegi kasumi vastava avaldisega ja lihtsustame saadud ruutvõrrandi:

$$\begin{aligned} -40p^2 + 16000p - 1200000 &= 300000 & | -300000 \\ -40p^2 + 16000p - 1500000 &= 0 \\ -40p^2 + 16000p - 1500000 &= 0 & | :(-40) \\ p^2 - 400p + 37500 &= 0 \end{aligned}$$

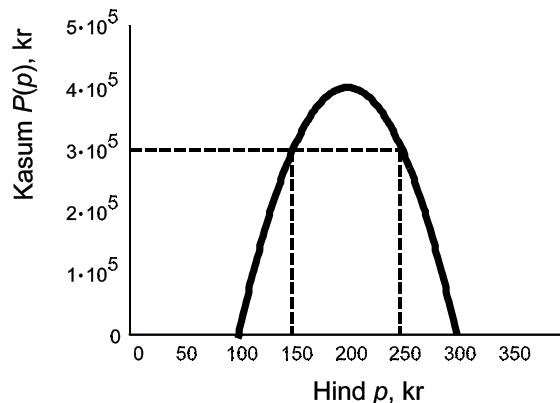
Kasutades ruutvõrrandi lahendi valemit saame:

$$p_1 = -\frac{-400}{2} - \sqrt{\left(\frac{400}{2}\right)^2 - 37500} = 150$$

ja teine lahend

$$p_2 = -\frac{-400}{2} + \sqrt{\left(\frac{400}{2}\right)^2 - 37500} = 250 .$$

Vastus: Nii hinna 150 kr kui ka hinna 250 kr juures on kasum 300 000 krooni.



Joonis 25

NÄIDE 3.4. Turu tasakaal

Toote pakkumist turul iseloomustab pakkumisfunktsioon, mis näitab turule paisatavate toodete arvu sõltuvust hinnast p :

$$q^S(p) = 2p^2 + 3p - 70$$

Toote nõudlust iseloomustab nõudlusfunktsioon, mis näitab nõutava koguse sõltuvust hinnast p

$$q^D = 380 - 8p$$

Leida tasakaaluhind, see on hind, mille korral pakutav kogus ja nõutav kogus on võrdsed.

Lahendus: Tasakaalutingimuse kirjutame kujul:

$$q^S(p) = q^D(p)$$

Järgnevalt asendame pakutava koguse q^S ja nõutava koguse q^D vastavate avaldistega.

$$\begin{aligned} 2p^2 + 3p - 70 &= 380 - 8p \\ 2p^2 + 3p - 70 - 380 + 8p &= 0 \\ 2p^2 + 11p - 450 &= 0 \end{aligned}$$

Ruutvõrrandi lahendi valemist leiame otsitava hinna:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-11 + \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-450)}}{2 \cdot 2} = 12,5 \\ p_2 &= \frac{-11 - \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-450)}}{2 \cdot 2} = -18 \end{aligned}$$

Kuna hind ei saa negatiivne olla, siis teisel lahendil puudub mõte ja selle jätame kõrvale.
Kontroll:

$$\begin{aligned} q^S(12,5) &= 2 \cdot 12,5^2 + 3 \cdot 12,5 - 70 = 280 \\ q^D(12,5) &= 380 - 8 \cdot 12,5 = 280 \end{aligned}$$

Vastus: Tasakaal turul saabub 12,5 kroonise hinna korral.

Graafik joonisel 26 kujutab **nõudmise-pakkumise mudelit**. Nõudmise ja pakkumise lõikepunkti nimetatakse tasakaalupunktiks, sellele vastavat hinda tasakaaluhinnaks ja kaubakogust tasakaalukoguseks. Piirkonda, kus nõudmine on pakkumisest suurem, nimetatakse ülenõudmiseks või alapakkumiseks. Piirkonda, kus pakkumine ületab nõudmise, nimetatakse ülepakkumiseks või alanõudluseks.

ÜLESANDED

3.17 Tooteühiku tootmiseks tehtavad kulutused on 30 kr ja nõudlust kirjeldab funktsioon $q(p) = -100p + 10000$, kus p on toote hind. Leida, millise hinna korral on kasum 100 000 krooni.

3.18 Linnatranspordi kasutajate arv on alates aastast 1990 muutunud järgmise seaduse kohaselt: $y(t) = t^2 - 40t + 800$, kus t on aastate arv alates aastast 1990 ja y sõitjate arv tuhandetes. Leida, millisel aastal jõuab sõitjate arv 500 tuhandeni?

3.19 Firma aktsiate väärtus on muutunud järgmiselt: $V(t) = -0,8t^2 + 120t + 200$, kus t on aktsiate väljalaskmisest möödunud kuude arv. Leida:

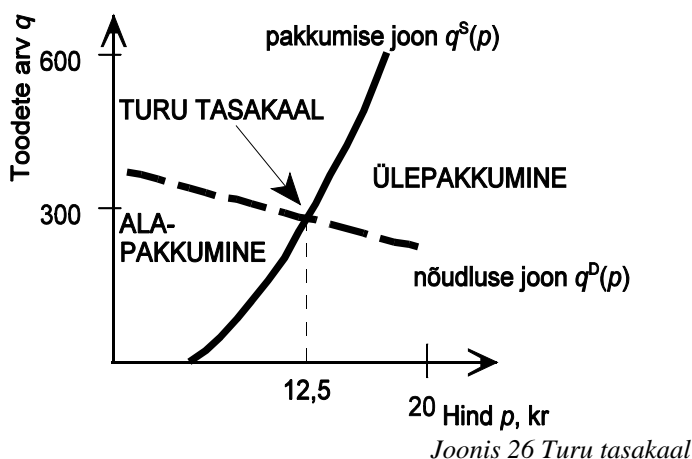
- milline oli aktsia väärtus 2 aastat pärast väljalaskmist;
- mitme aasta ja mitme kuu pärast jõudis aktsia väärtus 4000 kroonini.

3.20 Kirjeldagu nõutava koguse sõltuvust hinnast p funktsioon $q^D(p) = -500p^2 - 3000p + 40000$

Lähitulevikus on prognoositud hinna muutumist järgmiselt

$$p(t) = \frac{60}{t+10}$$

kus t on aeg päevades alates praegusest momendist. Mitme päeva pärast on nõudlus 32 000 tk? (Nõuanne: leia algul hind ja siis vastav kogus).



Joonis 26 Turu tasakaal

ÜLESANNETE VASTUSED

3.2 a) 14; b) 10; c) 5. **3.3** 25 klienti. **3.4** mees 35 kr, naine 105 kr. **3.5** 80 kr. **3.6** 500.. **3.7** Firmast B, kui üle 50 km.
3.9 a) 150 tk, b) kahjum on 1500 kr, c) 180 tk. **3.8** 100 **3.10** Alla 1 000 000 tk variant B. **3.11** Alla 3 tunni Juhanit. **3.12** 10 kr.
3.13 a) 25 000 tk, b) 150 000 tk. **3.14** 15. **3.15** Ligikaudu 47 tundi **3.16** 15 päeva. **3.17** 80 kr ja 50 kr; **3.18** Aastal 2000 ja aastal 2020 **3.19** a) 2619,2 kr; b) 3a. 9k, 8a. 9k. **3.20** 20 päeva.

4. PROTSENT- JA FINANTSARVUTUSEDProtsentülesannete põhitüübid.

Protsent on üks reaalarvu kirjutusviise: $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$. Üldiselt

$$p\% = \frac{p}{100} = 0,01p .$$

Et leida 1% arvust a , tuleb leida $\frac{1}{100}$ arvust a ja see on $\frac{a}{100} = 0,01a$.

Et leida 13% arvust a , tuleb leida $\frac{13}{100}$ arvust a ja see on $13 \cdot \frac{a}{100} = 0,13a$

Sageli kasutatakse protsentülesannete lahendamisel võrdust

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{100\%}$$

kus p antakse protsentides ja see näitab, mitu protsenti arv b moodustab arvust a . Kuna aga $100\% = 1$, võib paremal pool jagamise 100% -ga ära jätta ja me saame

$$\frac{b}{a} = p$$

NÄIDE 4.1. Protsendi leidmine

Härra A kulutab oma 7500 kroonisest kuu sissetulekust 500 kr auto peale. Mitu protsenti oma sissetulekust kulutab härra A auto peale?

Lahendus:

$$\frac{500}{7500} \approx 0,0667 = 6,67\%$$

Vastus: Auto peale kulub 6,67% härra A sissetulekust.

NÄIDE 4.2. Arvu leidmine protsendi järgi

Volli on kokku hoitud 10000 kr. 60% sellest tahab ta paigutada aktsiasse. Mitme krooni eest saab ta aktsiaid osta?

Lahendus:

$$\frac{x}{10000} = 60\% \\ x = 60\% \cdot 10000 = 0,6 \cdot 10000 = 6000$$

Vastus: Volli saab aktsiaid osta 6000 krooni eest.

NÄIDE 4.3. Osa leidmine

Juuksuritöökojas moodustavad kulutused rendile kõikidest fikseeritud kuludest 40%. Kui suured on töökoja fikseeritud kulud, kui rendile kulub 2000 kr kuus?

Lahendus: Olgu C_{rent} kulutused rendile ja C_F fikseeritud kulud kokku. Siis võime kirjutada, et

$$\frac{C_{rent}}{C_F} = 40\%$$

$$\frac{2000}{C_F} = 40\%$$

$$C_F = \frac{2000}{40\%} = \frac{2000}{0,4} = 5000$$

Vastus: Töökoja fikseeritud kulud on 5000 kr kuus.

ÜLESANDED

4.1 Leida arv b , mis oleks $p\%$ arvust a . Ümarda sajandikeni.

	$p\%$	a
a)	18%	350
b)	12,5%	65
c)	15%	65

4.2 Leida, mitu protsenti moodustab arv a arvust b . Ümardada vastused kümnendikeni.

	a	b
a)	8	10
b)	12	45
c)	18	500

4.3 Leida arv a , kui $p\%$ sellest on b . Ümarda 5 sajandiku täpsuseni.

	$p\%$	b
a)	18%	25
b)	26%	1500
c)	33%	200

4.4 Firmas on 120 töötajat ja 30% on täienduskoolituse läbi teinud. Kui mitu töötajat peab veel täienduskoolitust saama, et kõik oleks selle läbi teinud?

4.5 Mulda pandud 200 seemnest idanes 156. Leida idanevuse protsent.

4.6 Klassis on 20 inglise keele õppijat ja 7 saksa keele õppijat. Mitu protsenti õpilasi õpib inglise keelt ja mitu protsenti õpib saksa keelt?

4.7 Kui Jaan kulutab 65% oma jõudeajast televiisori vaatamiseks ja seda teeb ta 13 tundi nädalas, mitu tundi on Jaanil nädalas jõudeaega?

4.8 Müüja Malle teenindab tunnis 65 ostjat, müüja Tiiu 50 ostjat. Leida

- mitu protsenti on Malle töökiirus Tiiu omast suurem?
- mitu protsenti on Tiiu töökiirus Malle omast väiksem?

4.9 Kaup hinnaga 3500 kr lasti odavale väljamüügile hinnaga 3000 kr. Leida, mitu protsenti on

- väljamüügi hind madalam esialgsest hinnast;
- esialgne hind kallim väljamüügi hinnast.

4.10 Kui oli tehtud 45% ettenähtud tööst, maksti selle eest 1440 kr. Kui suur summa oli ette nähtud kogu töö tegemise eest?

4.11 Firma kulufunktsioon on $C(q) = 500 + 30q$. Leida, mitu protsenti moodustavad püsikulud kogukuludest, kui

- tootmiskaht on 200 ühikut;
- tootmiskaht on 500 ühikut.

4.12 Ettevõtte tööjõukulud on töötasu pluss selle pealt makstavad maksud (haigekassa, sotsiaalmaks, pensionikindlustus).

Ettevõtte A peab sotsiaal- ja haigekassamaksetena kandma riigieelarvesse summa, mis on 33% väljamakstavast töötasust. Kui tööjõukuludeks oli planeeritud 207480 kr, kui suur on töötasuna väljamakstav summa?

Protsentuaalne kasvamine ja kahanemine.

NÄIDE 4.4. Protsentuaalne kasv.

1993. a. jaanuaris oli Eestis keskmine palk 755 kr. Aastaga kasvas keskmine palk 54,2%. Kui suur oli keskmine palk

1994. a. jaanuaris?

I lahenduskäik: $755 + 54,2\% \cdot 755 = 755 + 0,542 \cdot 755 = 755 + 409,21 = 1164,21 \approx 1164$;

II lahenduskäik $755 + 54,2\% \cdot 755 = 755 (1 + 0,542) = 755 \cdot 1,542 = 1164,21 \approx 1164$.

Vastus: 1994.a. jaanuaris oli keskmine palk Eestis 1164 kr.

Kui arvu a tuleb suurendada $p\%$, s.t. arvule a tuleb liita $p\%$ arvust a , siis

$$b = a + p\%a = a + 0,01pa = a(1 + 0,01p).$$

Näiteks $20 + 3\% \cdot 20 = 20 + 0,03 \cdot 20 = 20(1 + 0,03) = 20 \cdot 1,03$

Kui arvu a tuleb suurendada $p\%$, s.t. arvust a tuleb lahutada $p\%$ arvust a , siis

$$b = a - p\%a = a - 0,01pa = a(1 - 0,01p).$$

Näiteks $20 - 3\% \cdot 20 = 20 - 0,03 \cdot 20 = 20(1 - 0,03) = 20 \cdot 0,97$

ÜLESANDED

4.13 Aktsiate hind oli eelmisel kuul 150 kr. Sellel kuul oli hind kasvanud 4%. Kui eeldada, et kasv jätkub samas tempos, kui suur oleks aktsiate hind järgmisel kuul?

4.14 Arve maksetähtaja ületamisel tuleb maksta viivist 0,1% summast S iga hilinemispäeva eest. Leida võlgnevuse V (summa + viivis) sõltuvus päevade arvust n .

4.15 1993.aastal oli kaupluse läbimüük 2 500 000 kr. 1994.a. oli läbimüük võrreldes 1993. aastaga 5% suurem. Leida:

a) kui suur oli läbimüük 1994.a.;

b) kui 1995. a. kasvab läbimüük samuti 5%, kui suur see peaks tulema?

4.16 "Postimees" 18. septembril 1998: "Eesti Panga poolt ringlusesse lastud sularaha maht moodustas augusti lõpul 5,5906 miljardit krooni, suurenedes möödunud aasta augusti lõpuga võrreldes 4,2 protsenti." Kui suur oli ringluses oleva sularaha maht 1997.a augusti lõpus?

4.17 Kui hüvise hind on p ja hüvise tarbimiskogus q , siis tarbija kulutused selle hüvise tarbimiseks on $C = pq$. Kui hüvise hind tõusis 25%, mitu protsenti peab tarbija vähendama tarbimiskogust, et kulutused jääksid samaks.

4.18 Kulutused elektrienergiale moodustavad praegu leiva omahinnast 10%. On oodata elektrienergia hinnatõusu 50 sendilt kWh kohta 60 sendini kWh kohta.

a) Kui suurt leiva hinnatõusu saab põhjendada elektrienergia kallinemisega?

b) Kui "Madise" leib maksab praegu 8.60, siis kui suur oleks selle leiva hind peale hinnatõusu?

4.19 *) Kauba hinda tõsteti $r\%$, mille tulemusel tarbija vähendas selle kauba ostmist $r\%$. Mitu protsenti muutusid tarbija rahalised väljaminekud?

4.20 *) Soome marga kurss Eesti krooni suhtes langes 1%. Kuidas muutus Eesti krooni kurss Soome marga suhtes?

Hinnad ja palgad

Kaupluse hinnakujundus

sisseostuhind	Sh	
+ soetamiskulud (transport, rent jms.)	Sk	
= omahind, soetamishind	Oh	$= Sh + Sk$
+ kasum (näit. 15% omahinnast)	P	
= jaehind, netohind, hind ilma käibemaksuta	Jh	$= Oh + P$
+ käibemaks (Eestis näit. 18% jaehinnast)	Km	
= müügihind, lõpphind, brutohind	Mh	$= Jh + Km$

NÄIDE 4.5. Sisseostuhind, omahind ja jaehind

Kauplus ostab sisse sealiha hinnaga 26 kr kilogramm. Leida 1 kg sealiha omahind, jaehind ja müügihind, kui:

1) soetamiskuludeks arvestatakse 30% sisseostuhinnast;

2) kasumimääraks võetakse 15% omahinnast;

3) käibemaksu määr on 18% jaehinnast.

Lahendus:

1)-st soetamiskulud	$Sk = 30\% Sh$	$= 0,3 Sh$	
omahind	$Oh = Sh + 0,3 Sh$	$= 1,3 Sh$	$= 1,3 \cdot 26 = 33,80$
2)-st kasum	$P = 15\% Oh$	$= 0,15 Oh$	

jaehind	$Jh = Oh + 0,15 Oh$	$= 1,15 Oh$	$= 1,15 \cdot 33,80 = 38,87$
3)-st käibemaks	$Km = 18\% Jh$	$= 0,18 Jh$	
müügihind	$Mh = Jh + 0,18 Jh$	$= 1,18 Jh$	$= 1,18 \cdot 38,87 = 45,87$

Palk

brutopalk - tulumaks = netopalk	$Bp - Tm = Np$
tulumaks = tulumaksumäär · (brutopalk - maksuvaba tulu)	
brutopalk + eraldised riigieelarvesse = tööjõu kulud	$Bp + Re = Tf$
eraldised riigieelarvesse = ravikindlustusmaks + sotsiaalmaks	

NÄIDE 4.6. Netopalka põhjal brutopalka leidmine

Olgu tulumaksumäär 26% maksustatavast summast ja maksuvaba summa olgu 500 kr kuus. Tulumaks Tm on sellisel juhul

$$Tm = 0,26(Bp - 500)$$

kus Bp on kuu brutopalk.

Netopalk Np on

$$Np = Bp - Tm = Bp - 0,26(Bp - 500) = 0,74Bp + 130$$

See tähendab, et netopalk on 74% brutopalgast pluss veel 26% maksuvabast tulust.

Viimasest seosest avaldame brutopalka

$$\begin{aligned} Np - 130 &= 0,74Bp \\ \frac{Np - 130}{0,74} &= Bp \end{aligned}$$

Leidsimegi seose brutopalka leidmiseks netopalka järgi.

ÜLESANDED

4.21 kasutades näites 4.5 toodud juurdehindlusmäärasid, leia sealihha sisseostuhind, kui müügihind peaks olema

- 40 kr;
- 42 kr.

4.22 Firma kuulutab ajalehes, et ta müüb pahtlit järgmiste hindadega (hinnad sisaldavad käibemaksu):

- 1,0 kg purk - 92 kr
- 2,0 kg purk - 167 kr

a) Millised oleksid pahtli hinnad ilma käibemaksuta?

b) Mitu protsenti kulutab ostja raha vähem, kui ta ostab kahe 1,0 kg purgi asemel ühe 2,0 kg kaaluva purgi?

4.23 Kauba hind koos 18%-lise käibemaksuga on 500 kr. Kui suur on käibemaks kroonides?

4.24 Ostetakse paar saapaid müügihinnaga 250 kr.

a) Milline on saabaste jaehind?

b) Kui suur on kaupluses saapapaari omahind ja sisseostuhind, kui kasum on 15% ja hankekulud 25%?

c) Mitu krooni saab kauplus iga saapapaari müügist kasumit?

4.25 Kauba müügihind (hind koos käibemaksuga) oli 250 kr. Kauba jaehinda alandati 15%. Kui suur on uus müügihind?

4.26 Näidata, et kui jaehinda alandada r %, alaneb ka müügihind r %.

4.27 Müügijuht tahab arvutusvalemit kauba omahinna Oh arvutamiseks, lähtudes müügihinnast Mh . Kasumiprotsendiks soovib ta võtta 15% ja käibemaks on 18%. Kirjutada välja vastav võrrand.

4.28 Kui Juhan Juurikas tahab oma töö eest puhtalt kätte saada (netopalk) 3500 kr, kui suur peaks olema tema brutopalk, kui tulumaksumäär on 26% brutopalgast ja maksuvaba tulu on 500 kr kuus?

4.29 Juku töötab kuus 160 tundi tunnitasuga 50 kr ja Juhan töötab 100 tundi tunnitasuga 40 kr. Kui suur töötasufond tuleb planeerida, kui ravikindlustuse määr on 13% brutopalgast ja sotsiaalkindlustuse määr 20% brutopalgast?

4.30 1995. a. oli tulumaksuvaba miinimum 300 kr. 1996.a. on see 500 kr. Juku kuupalk on 4500 kr. Leida

a) mitu krooni on Juku aastane netopalk 1996.aastal suurem kui 1995.a.

b) mitu protsenti on Juku aastane netopalk 1996.aastal suurem kui 1995.a.

4.31 Leida seos brutopalka leidmiseks netopalka põhjal, kui

a) tulumaksumäär on 26% ja maksuvaba tulu 800 kr kuus.

b) tulumaksumäär on 15% ja maksuvaba tulu 800 kr kuus.

4.32 *) Leida seos brutopalka leidmiseks netopalka põhjal, kui tulumaksumäär on r ja maksuvaba miinimum Mv .

Lihtintressid. Aritmeetiline rida

Panka paigutatud (või välja laenatud) kapital kannab intresse, selle pealt saadakse intressitulu. Intressimäär avaldatakse tavaliselt protsentides algkapitalilt (investeeringult) aasta kohta.

Kui iga-aastase intressi arvutamise aluseks on üks ja seesama summa, siis seda nimetatakse **lihtintressiks**. Lihtintressi korral juurdekasv lisatakse põhikapitalile ühekordselt.

NÄIDE 4.7. Lihtintress.

Rahasumma 10 000 kr laenatakse välja 2 aastaks lihtintressimääraga 12% aastas. Kui suure summa saab võlausaldaja tagasi, kui võlg tagastatakse tervikuna tähtaja lõpul?

$$\begin{array}{lll} \text{algkapital} & k & = 10\,000 \\ \text{intressimäär} & r & = 12\% \\ \text{aastate arv} & n & = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{intressitulu ühe aasta eest} & i = rk & = 0,12 \cdot 10\,000 = 1200 \\ \text{intressitulu kogu ajavahemiku eest} & I = in & = 1200 \cdot 2 = 2400 \\ \text{tagasisaadav summa e. lõppkapital} & K = k + I & = 10\,000 + 2400 = 12\,400 \end{array}$$

Vastus: Tagasisaadav summa on 12 400 krooni.

Lihtintressi korral, kui algkapital on k , lihtintressimäär mingi perioodi (aasta, kuu, päeva) kohta r ja perioodide (aastate, kuude, päevade) arv n , siis intressitulu

$$I = rkn$$

Kogu tagasisaadav summa (lõppkapital):

$$\begin{aligned} K &= k + I \\ K &= k + rkn \\ K &= k(1 + rn) \end{aligned}$$

Tähtjad on tihti erinevad täisaastatest. Sellisel juhul täisaastast erinev periood teisendatakse kas kuudeks või päevadeks ja leitakse intressimäär vastavalt kuu või päeva kohta. Perioodide arvuks n võetakse vastavalt kuude või päevade arv. Saksa intressitavade kohaselt on aastas 360 päeva ja kuus 30 päeva.

NÄIDE 4.8. Lihtintress

Härra X investeeris 70000 kr kolmeks kuuks 8%-ga. Milline on tema investeeringu tulu?

$$\begin{array}{ll} \text{algkapital} & k = 70\,000 \\ \text{intressimäär ühe kuu kohta} & r = \frac{8\%}{12} \\ \text{perioodide (kuude arv)} & n = 3 \end{array}$$

$$\text{intressitulu kolme kuu pealt } I = rkn = 70\,000 \cdot \frac{8\%}{12} \cdot 3 = 1400$$

Vastus: Härra X sai oma investeeringu pealt tulu 1400 krooni.

Algkapitali nimetatakse ka raha **olevikuväärtuseks** (ingl. *present value*, *PV*); lõppkapitali **tulevikuväärtuseks** (*future value*, *FV*), s.t. olevikus investeeritud rahasumma väärtus tulevikus.

NÄIDE 4.9. Lihtintress perioodiliste sissemaksete korral.

Perekond avab suurema ostu sooritamiseks säästuarve lihtintressimääraga 8,5% aastas ning igakuise sissemaksuga 100 kr. Kui suur on säästuarve 5. aasta lõpul?

Kuna iga kuu tagant summa, mille alusel tuleb intressi leida, muutub, leiame intressid iga erineva summa jaoks eraldi ja liidame. Arvestada tuleb seda, et iga erinev summa on pangas ühe kuu vältel, järelkult tuleb intressi arvutamisel perioodiks võtta 1 kuu.

Sissemakse	1.	2.	3.	...	59.	60.	KOKKU
Summa, mille eest arvutatakse intresse, (akumuleeruv kapital)	100	200	300	...	5900	6000	
Vastava summa eest makstav intress (r on intressimäär 1 kuu eest)	$100r$	$200r$	$300r$...	$5900r$	0	$100r + 200r + \dots + 5900r = r(100 + 200 + \dots + 5900)$

"Kokku" veerus tuleb meil leida summa $100 + 200 + \dots + 5900$.

Rida on avaldis, mis koosneb lõpmatust jadast liidetavatest, rea liikmetest:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{i-1} + a_i + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Rida nimetatakse **aritmeetiliseks reaks**, kui iga rea liikme ja temale eelneva liikme vahe d on konstantne [1, lk.367-373]:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_i - a_{i-1} = \dots = d$$

Aritmeetilise rea esimese m liikme summa on

$$S_m = \sum_{i=1}^m a_i = \frac{(a_1 + a_m)m}{2} .$$

Erijuhul, kui liikmete vahe on võrdne esimese liikmega, ($d = a_1$):

$$S_m = \frac{(1+m)m}{2} d$$

Seega näites "Kokku" veerus tuleb leida esimese $59=60-1$ liikme summa aritmeetilisest reast $100 + 200 + \dots + 5900 + \dots$. See on summa kõikidest erinevatest jääkidest, mis igaüks on arvel 1 kuu vältel.

$$\begin{aligned} \text{sissemaksete arv} & n = 60 \\ \text{igakuine sissemaks} & d = 100 \\ \text{intressimäär ühe kuu kohta} & r = \frac{8,5\%}{12} \end{aligned}$$

erinevate jääkide arv m on 1 võrra

vähsem sissemaksete arvust n : $m = n - 1 = 59$;

summa, mille alusel makstakse intressi ühe kuu

$$\text{määra järgi avaldame } n \text{ kaudu: } S_m = \frac{(1+m)m}{2} d = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} d = \frac{n(n-1)}{2} d = 1770 \cdot 100 = 177\ 000 ;$$

$$\text{kogu intressitulu } I = r S_m = r \frac{n(n-1)}{2} d = \frac{0,085}{12} \cdot 177\ 000 = 1253,75 ;$$

$$\text{terve säästusumma } K = dn + I = dn + r \frac{n(n-1)}{2} d = dn \left(1 + r \frac{n-1}{2} \right) = 100 \cdot 60 + 1253,75 = 7253,75 .$$

Kui võrdsete perioodide tagant n perioodi vältel hoiustatakse konstantne summa d lihtintressimääraga r perioodi kohta, siis terve säästusumma on

$$K = dn \left(1 + r \frac{(n-1)}{2} \right)$$

NÄIDE 4.10. Laenu tagasimaksmine võrdsetes osades.

Firma laenab 1,5 aastaks 180 000 krooni intressimääraga 9% aastas. Laenu tagasimaksmine toimub fikseeritud tagasimaksetena iga kvartali lõpul. Milline on summaarne laenukulu, kui intressi arvutatakse laenu jäägilt?

Lahendus: Fikseeritud tagasimakse suurus leitakse laenusumma jagamisel tagasimaksete arvuga 6 (1,5 aastat on 6 kvartalit):

$$\frac{180000}{6} = 30000. \text{ Intressimäär perioodi (kvartali) kohta on } r = \frac{9\%}{4} = 2,25\%$$

Jääk	Intress	Tagasimakse
180000	$180000r$	30000
150000	$150000r$	30000
120000	$120000r$	30000
90000	$90000r$	30000
60000	$60000r$	30000
30000	$30000r$	30000

Summaarse intressi leidmiseks tuleb liita keskmises veerus olevad arvud. See summa on $r \cdot (30000 + 60000 + \dots + 180000)$.

Sulgudes on aritmeetiline rida, mille esimene liige on 30000 ja vahe on samuti 30000, reas on liikmeid 6. Sellise rea summa saab leida aritmeetilise rea summa valemi põhjal:

$$S_6 = \frac{(1+6) \cdot 6}{2} \cdot 30000 = \frac{(1+6) \cdot 6}{2} \cdot \frac{180000}{6} = \frac{1+6}{2} \cdot 180000$$

Teises veerus olevate arvude summa on siis

$$I = r \cdot S_6 = 2,25\% \cdot 180000 \cdot \frac{1+6}{2} = 14175$$

Vastus: Summaarne intress, mis tuleb sellelt laenult maksta, ehk laenukulu on 14175 krooni.

Kui laenu tagasimaksmine toimub võrdsete perioodiliste tagasimaksetena, siis laenukulu võib leida valemist

$$I = kr \frac{1+n}{2}$$

kus k on laenatud summa, r intressimäär perioodi kohta ja n tagasimaksete arv.

ÜLESANDED

- 4.33 Summa 30 000 kr laenatakse välja 6 kuuks lihtintressimääraga 20% aastas. Leida tagasisaadav summa.
- 4.34 Kui kauaks võin ma laenata 25 000 kr aastase lihtintressimääraga 15%, kui tagasi saan maksta 30 000 kr?
- 4.35 Mitu aastat peab olema hoiul 10 000 krooni, et see kasvaks lihtintressimääraga 8% aastas korral 15 000 kroonini?
- 4.36 Kui suur peab olema aastane lihtintressimäär, et 5000 krooni kasvaks 2,5 aastaga 6000 kroonini?
- 4.37 Kui suur peab olema aastane lihtintressimäär, et algkapital kolmekordistuks 3 aastaga?
- 4.38 Laenuleping sõlmiti 5000 krooni peale 14. detsembril 1993 tähtajaga 25.06.1997, lihtintressimääraga 6% aastas. Kui suure summa peab võlgnik tagastama?
- 4.39 Ametnik hoiustab iga kuu tagant 500 krooni lihtintressimääraga 6% aastas. Kui suur on säästusumma pärast 8 aasta möödumist?
- 4.40 Iga kolme kuu tagant hoiustatakse 500 krooni selleks, et 4 aastaga koguneks pankka 10 000 krooni. Kui suur peaks olema aastane lihtintressimäär?
- 4.41 Firma laenab üheks aastaks 480 000 krooni. Pakutakse kahte võimalust:
- intressimäär on 9% aastas ja laenu tagasimaksmine toimub 12-s osas fikseeritud tagasimaksetena iga kuu lõpul.
 - intressimäär on 8% aastas ja laenu tagasimaksmine toimub 4-s osas fikseeritud tagasimaksetena iga kvartali lõpul.
- Leida summaarne laenukulu kummalgi juhul.

Liitintressid. Geomeetriline rida

Kui igal intressi arvutamise perioodil võetakse intressi arvutamise aluseks kapital koos eelmise perioodi intressiga, siis kannab kapital **liitintresse**. Sel juhul intress ise kannab ka intressi. Olgu algkapital k krooni, intressimäär aastas r ning intresside kandmise aeg n aastat. Leiame, millise summani on kapital kasvanud:

$$2. \text{ aasta algul: } k_2 = k(1+r)$$

$$3. \text{ aasta algul: } k_3 = k_2(1+r) = k(1+r)(1+r) = k(1+r)^2$$

$$4. \text{ aasta algul: } k_4 = k_3(1+r) = k(1+r)^2(1+r) = k(1+r)^3$$

jne.

Liitintressi korral on lõppkapitali K suurus pärast n perioodi möödumist

$$K = k(1+r)^n$$

kus r on intressimäär perioodi kohta (konstantne) ja k algkapital.

NÄIDE 4.11. Liitintress.

Olgu hoiustatud algkapital 10 000 krooni, intressimäär 5% ja hoiustamisaeg 6 aastat. Leida lõppkapital, kui intress kantakse arvele iga aasta lõpul.

$$\begin{aligned} \text{algkapital} & k = 10000 \\ \text{intressimäär} & r = 5\% \\ \text{hoiustamisaeg} & n = 6 \end{aligned}$$

$$\text{lõppkapital} \quad K = k(1+r)^n = 10000(1+0,01 \cdot 5)^6 = 10000 \cdot 1,05^6 = 13400,95$$

Lahendus:

Vastus: Lõppkapital on 13400 krooni ja 95 senti.

NÄIDE 4.12. Raha tulevikuväärtus

Firmal on võimalus investeerida 500 000 krooni projekti, mis annab 3 aasta pärast tulu 600 000 krooni. Kas see investering tasub end ära, kui pankades on keskmine intressimäär 9,5% aastas?

Lahendus: Leiame 500 000 krooni tulevikuväärtuse 3 aasta pärast:

$$\begin{aligned} \text{olevikuväärtus} & k = 500000 \\ \text{intressimäär} & r = 9,5\% \\ \text{aastate arv} & n = 3 \end{aligned}$$

$$\text{tulevikuväärtus} \quad K = k(1+r)^n = 500000(1+0,095)^3 = 500000 \cdot 1,095^3 = 656466$$

Vastus: Projekti ei tasu investeerida, sest vastava summa tulevikuväärtus on suurem, kui projektist saadav tulu.

Geomeetriliseks reaks nimetatakse rida, mille iga liikme ja temale eelneva liikme suhe q on konstantne:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_i}{a_{i-1}} = \dots = q \quad .$$

Geomeetrilise rea esimese m liikme summa on

$$S_m = \sum_{i=1}^m a_i = \frac{a_1(q^m - 1)}{q - 1} \quad .$$

NÄIDE 4.13. Liitintress perioodiliste maksete korral.

Perekond säästab igal aastal 5000 kr, mis paigutatakse panka intresse kandma. Kui suureks kasvab perekonna pangakapital 10 aastaga, kui intressimäär on 8% aastas ja intress kantakse arvele iga aasta lõpul?

Vaatleme, kuidas sissemaksed kannavad intresse.

Sissemakse	1.	2.	...	9.	10.	KOKKU
Mitu aastat kannab intresse	9	8	...	1	-	
Summa, milleks sissemakse kasvab	$5000 \times 1,08^9$	$5000 \times 1,08^8$...	$5000 \times 1,08$	5000	$5000 (1,08^9 + 1,08^8 + \dots + 1,08 + 1)$

Veerus "Kokku" on sulgudes geomeetrilise rea summa, milles on 10 liiget ($m = 10$) teguriga $q = 1,08$ ja esimese liikmega $a_1 = 1$. Kasutades geomeetrilise rea summa valemit,

$$1 + 1,08 + 1,08^2 + \dots + 1,08^9 = \frac{1(1,08^{10} - 1)}{1,08 - 1} = 72\,432,80$$

saame lõppkapitaliks

$$K = 5000 \cdot \frac{1(1,08^{10} - 1)}{1,08 - 1} = 72\,432,80$$

Vastus: Lõppkapital on 72432,80 kr.

Perioodiliste sissemaksete korral, kui p on perioodilise sissemaksu suurus ja n perioodide arv, siis liitintressi kandnud investeering annab lõppkapitaliks

$$K = p \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Kui arve avamisel kantakse arvele ühekordselt algkapital k ja hiljem lisandub n perioodilist sissemakset ühesuguse suurusega p , siis lõppkapitali K arvutamiseks kasutatakse valemit

$$K = k(1+r)^n + p \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

kus r on intressimäär perioodi kohta.

ÜLESANDED

4.42 Leida lõppkapitali suurus, kui algkapital on 20 000 kr, liitintressimäär 5% aastas ja kapitali kasvu aeg 4 aastat. Intress lisatakse arvele kord aastas.

4.43 Kui suur summa on pangas aasta lõpuks, kui aasta algul oli seal 5000 kr, aasta intress on 5% ja intress kantakse arvele iga kuu? Kui aga intress kantakse arvele iga päeva lõpul?

4.44 Firmal on võimalus investeerida 800 000 krooni projekti, mis annab 5 aasta pärast tulu 1,5 milj. krooni. Kas see investeering tasub end ära, kui pankades on keskmine intressimäär 8,5% aastas?

4.45 Hoiustaja säästab 10 aasta vältel igal aastal 1200 krooni ja paneb selle raha aasta lõpul panka, kus makstakse intresse 6% aastas. Kui suure summa võib ta akumulierenud kapitali arvel järgneval kümnendil iga aasta lõpul pangast välja võtta, kui intressimäär on endine? Intressi lisamine arvele toimub iga aasta lõpul.

4.46 25-aastane ülikooli lõpetaja otsustab oma 40 tööaasta vältel panna igal aastal panka 1000 krooni intressimääraga 10% aastas. Akumulierenud kapitali kavatses lõpetaja kasutada pensionilisana järgneva 20 aasta vältel sama intressimääraga. Kui suureks kujuneb optimisti iga-aastane pensionilisa?

4.47 Pakutakse järgmist kindlustuslepingut: 5 aasta vältel makstakse iga kuu lõpus sulle 500 kr, kusjuures kindlustusleping maksab 25 000 kr ja intress on 8% aastas. Kas see investeering tasub end ära?

4.48 Kui suur peab olema perioodiline sissemakse, kui lõppkapitaliks on 18000 kr, intressimäär on 8% aastas ja sissemakseid tehakse 10 aastat kord 3 kuu jooksul? Intress lisatakse kord aastas.

4.49 Viie aasta jooksul võetakse iga aasta lõpul pangast välja 1200 krooni, kuid panka jääb veel 1500 krooni. Kui suur peab olema algkapital, kui intressimäär on 5%?

ÜLESANNETE VASTUSED

4.1 63,00; 8,13; 9,75 4.2 80,0%; 26,7%; 3,6% 4.3 138,90; 5769,25; 606,05 4.4 84 4.5 78% 4.6 74,1%; 25,9% 4.7 20
 4.8 a)30%; b) 23,1% 4.9 a)14,3%; b)16,7%. 4.10 3200 kr. 4.11 a) 7,7%; b) 3,2%. 4.12 156000 kr 4.13 162,24 4.14
 $V=S(1+0,001n)$ 4.15 2 625 000 kr; 2 756 250 kr 4.16 5,3653 miljardit krooni. 4.17 20%. 4.18 a) Hinnatõusu 2%; b) 8.75 kr.
 4.19 $0,01p^2$ % 4.20 Tõusis 1,01%. 4.21 22,67 kr; 23,81 kr. 4.22 a) 77,95; 141,55; b) 9,2% 4.23 76,27 kr 4.24 211,86; 184,23;
 147,38 4.25 212,50 kr 4.27 $Oh = \frac{Mh}{1,28}$ 4.28 4554,05 kr 4.29 15 960 kr 4.30 624 kr; 1,53% 4.31 a) $Bp = \frac{Np - 208}{0,74}$,
 b) $Bp = \frac{Np - 120}{0,85}$ 4.32 $Bp = \frac{Np - rMv}{1 - r}$ 4.33 33000 kr. 4.34 1,33... a = 1a. 4k. 4.35 6,25a. = 6a. 3k. 4.36 8% aastas. 4.37
 66,7% 4.38 6059,17 kr 4.39 59 400 kr 4.40 13,3% 4.41 a) 23400 kr, b) 24000 kr. 4.42 24 310,13 kr 4.43 5255,81 kr,
 5256,34 kr 4.44 Tasub, sest tulu on suurem kui tulevikuväärtus 1,2 milj kr. 4.45 2149 kr 4.46 51 987 kr 4.47 Ei tasu, kapitali
 olevikuväärtus on 24 659,22 kr, mis on väiksem küsitud summast. 4.48 310,63 kr 4.49 6370,66 kr

5. LINEAARSED VÕRRANDSÜSTEEMID.

Asendus- ja liitmisvõte

NÄIDE 5.1. Lineaarse võrrandsüsteemi lahendamine asendusvõttega

Iga polüvitamiini "Iks" dražee sisaldab 10 mg vitamiini A ja 20 mg vitamiini C ning iga polüvitamiini "Igrek" dražee sisaldab 10 mg A vitamiini ja 30 mg C vitamiini. Kui sa vajad iga päev täpselt 50 mg A ja 120 mg C vitamiini, mitu dražeed "Iks" ja dražeed "Igrek" sa pead päevas võtma?

Lahendus. Olgu x dražeede "Iks" arv ja y dražeede "Igrek" arv

Paneme kirja seosed:

	dražee "Iks"		dražee "Igrek"	=	Kokku päevas
vitamiin A	$10x$	+	$10y$	=	50
vitamiin C	$20x$	+	$30y$	=	120

Need kaks võrrandit moodustavad **võrrandsüsteemi**. Meil tuleb leida sellised suurused x ja y väärtused, mille korral mõlemad võrrandid on rahuldatud.

Esialgu lihtsustame võrrandeid ja seejärel kasutame **asendusvõtet**, st. avaldame ühest võrrandist näiteks suuruse y ja asendame teise võrrandisse.

$$\begin{cases} 10x + 10y = 50 & | :10 \\ 20x + 30y = 120 & | :10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

1. Avaldame esimest võrrandist suuruse y :

$$y = 5 - x$$

2. Saadud avaldise paneme teise võrrandisse:

$$2x + 3(5 - x) = 12$$

3. Lahendame saadud ühe tundmatuga võrandi:

$$\begin{aligned} 2x + 3(5 - x) &= 12 \\ 2x + 15 - 3x &= 12 \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

4. Kui x on teada, saame leida ka suuruse y . Selleks kasutame seda avaldist, kus y on avaldatud x kaudu:

$$y = 5 - x = 5 - 3 = 2$$

Kontroll: I võrandi vasak pool: $10 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 50$; vasak pool = parem pool.

II võrandi v.p.: $20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 120$; v.p. = p.p.

Seega võrrandsüsteemi rahuldab arvupaar

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vastus: Dražeed "Iks" tuleb võtta 3 tk päevas ja dražeed "Igrek" tuleb võtta 2 tk päevas.

Võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nimetatakse **kahe tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemiks**.

Võrrandisüsteemi **lahendiks** on arvupaar $(x; y)$, mis rahuldab mõlemat võrrandit.

Võrrandsüsteemi lahendamine **asendusvõttega**:

1. Ühest võrrandist avaldatakse üks tundmatu teise kaudu.
2. Leitud avaldis asetatakse teise võrrandisse.
3. Lahendatakse saadud ühe tundmatuga võrrand.
4. Teise tundmatu leidmiseks kasutatakse esimesel etapil leitud avaldist, millega teostati asendus.

Asendusvõtet saab kasutada ka rohkem kui kahest võrrandist koosneva süsteemi lahendamiseks.

NÄIDE 5.2. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine asendusvõttega.
Olgu meil kolmest võrrandist koosnev süsteem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Avaldame kolmandast võrrandist x_1 :

$$x_1 = 3 - x_2 + x_3$$

ja asetame saadud avaldise esimesse ja teise võrrandisse. Peale lihtsustamist saame kahe tundmatuga kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist x_2

$$x_2 = 1 - 2x_3$$

ja asetame saadud avaldise teise võrrandisse. Peale lihtsustamist saame

$$x_3 = 0$$

Kasutades eespool toodud avaldise x_1 ja x_2 jaoks, leiame ka nende tundmatute väärtused. Võrrandsüsteemi lahend on

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Kontroll:

- I: $2 + 2 \cdot 1 + 0 = 4$, v.p.=p.p
 II: $2 \cdot 2 - 1 + 0 = 3$, v.p.=p.p
 III: $2 + 1 - 0 = 3$, v.p.=p.p

NÄIDE 5.3. Lineaarse võrrandsüsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Firma toodab kaht toodet X ja Y. Tootmisel kasutatakse kaht järjestikust tootmisprotsessi A ja B. Protsessi A ressurss on 1750 tundi ja protsessi B ressurss on 4000 tundi. Toode X nõuab 3 tundi protsessi A ja 2 tundi protsessi B, toode Y vajab 1 tund protsessi A ja 4 tundi protsessi B. Kui palju saab toota toodet X ja toodet Y, et mõlema protsessi ressursid ammenduksid?

Lahendus: Olgu toote X hulk x ja toote Y hulk y . Kirjutades esimese võrrandi protsessi A summaarse ressursi kohta ja teise võrrandi B ressursi kohta, saame võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} \text{A:} & 3x + y = 1750 \\ \text{B:} & 2x + 4y = 4000 \end{cases}$$

1. Lahendamiseks kasutame liitmisvõtet. Selleks korrutame esimese võrrandi läbi sellise teguriga, et muutuja y kordajad esimeses ja teises võrrandis oleksid vastandavad:

$$\begin{cases} 3x + y = 1750 \\ 2x + 4y = 4000 \end{cases} \quad | \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -12x - 4y = -7000 \\ 2x + 4y = 4000 \end{cases}$$

2. Liidame võrrandite vasakud ja paremad pooled:

$$\begin{cases} -12x - 4y = -7000 \\ 2x + 4y = 4000 \end{cases} \quad | + \\ \hline -10x = -3000$$

3. Saadud võrrandi lahendamine annab, et $x = 300$.

4. Leitud x väärtuse asetame esimesse võrrandisse algses võrrandsüsteemis ja leiame tundmatu y väärtuse:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 300 + y &= 1750 \\ y &= 1750 - 900 \\ y &= 850 \end{aligned}$$

Kontroll: I võrrandi v.p.: $3 \cdot 300 + 850 = 1750$; v.p. = p.p.

II võrrandi v.p.: $2 \cdot 300 + 4 \cdot 850 = 4000$; v.p. = p.p.

Vastus: Mõlema tootmisprotsessi ressursid ammenduvad, kui toodetakse 300 toodet X ja 850 toodet Y.

Võrrandsüsteemi lahendamisel liitmisvõttega

1. Korrutatakse võrrandite mõlemaid pooli selliste teguritega, et peale korrutamist on ühe tundmatu kordajad teineteise vastandavad.
2. Liidetakse võrrandite vastavad pooled.
3. Lahendatakse saadud ühe tundmatuga võrrand.
4. Tundmatu leitud väärtus asetatakse ühte antud võrrandeist ja lahendatakse see teise tundmatu suhtes.

Asendus ja liitmisvõtet võib kombineerida, eesmärgiks on ikka tundmatute järkjärguline elimineerimine, kuni saadakse üks võrrand ühe tundmatuga.

NÄIDE 5.4. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine.

Olgu meil kolmest võrrandist koosnev süsteem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist x_1 :

$$x_1 = 4 - 2x_2 - x_3$$

ja asetame saadud avaldise teise ja kolmandasse võrrandisse. Peale lihtsustamist saame kahe tundmatuga kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

Liites võrrandite mõlemad pooled, saame

$$0 = -9$$

Saime vastuolu, sellisel juhul võrrandsüsteemil lahend puudub.

NÄIDE 5.5. Kolmest võrrandist koosneva võrrandsüsteemi lahendamine.

Olgu meil kolmest võrrandist koosnev süsteem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist x_1 :

$$x_1 = 4 - 2x_2 - x_3$$

ja asetame saadud avaldise teise ja kolmandasse võrrandisse. Peale lihtsustamist saame kahe tundmatuga kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -3 \\ -x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Saime kaks identset võrrandit. Võrrandite lahutamisel saame samasuse

$$0 = 0$$

See tähendab, et võrrandsüsteemil on lõpmata palju lahendeid. Võrrandsüsteem on rahuldatud suvalise x_3 väärtuse korral, kui

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 3x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 \end{cases}$$

Lineaarsel võrrandsüsteemil

- ▶ võib olla üks lahend;
- ▶ võib lahend puududa;
- ▶ võib olla lõpmata palju lahendeid.

ÜLESANDED

5.1 Kahe testi punktide summa oli 175 ja vahe 11. Leida mõlema testi punktid.

5.2 Kahe testi punktide aritmeetiline keskmine oli 78 ja vahe 12. Leida mõlema testi punktid.

5.3 Kohviautomaat töötab 1- ja 5- krooniste müntidega. Automaadist võeti välja 210 münti kogusummas 490 kr. Mitu 1-kroonist ja mitu 5-kroonist münti välja võeti?

5.4 Härra Z on 100 000 kr paigutanud kahe firma aktsiatesse. Firma A aktsiate pealt saab dividende 8% nendesse paigutatud kapitalist ja firma B aktsiate pealt 10%. Kui suure summa eest on härra Z ostnud firma A aktsiaid ja kui suure summa eest firma B aktsiaid, kui kokku on dividende saadud 9400 kr?

5.5 Linnatranspordi kuukaart maksab 120 kr, soodustusega kaart aga 40 kr. Müüdnud on 6700 kaarti kogusummas 684 000 kr. Mitu kuukaarti on müüdnud kummastki liigist?

5.6 Mööblifirma toodab kahte tüüpi diivanilaudu, A ja B. Laudade tootmisprotsess koosneb monteerimisest ja viimistlemisest. A tüüpi laua monteerimine kestab 4 tundi ja viimistlemine 3 tundi, B tüüpi laua monteerimine kestab 1 tund ja viimistlemine 2 tundi. Monteerimisega tegeleb 5 töölisi ja viimistlemisega 6 töölisi. Leida, mitu A tüüpi ja mitu B tüüpi lauda on võimalik nädalas toota, kui tööpäevade pikkus kõigil töölistel on 40 tundi.

5.7 Linnas on bensiiniliitri hind 7.50 kr, maal on aga bensiin odavam, 7.20 kr liiter. Kuu aja jooksul oli autojuht ostnud 180 liitrit bensiini ja kokku kulutanud selle peale 1320 kr. Mitu liitrit odavamat ja mitu liitrit kallimat bensiini oli ta kuu aja jooksul ostnud?

5.8 Firmasse saabus arve 3000 krooni kohta. Arvel oli märgitud, et firma oli tellinud 100 pastapliiatsit ja 300 võtmehoidjat. Selgus aga, et tellimuse koostanud töötaja oli eksinud ja vajaminevad kogused olid teistsugused. Müügifirmaga lepiti kokku, et 100 võtmehoidjat tagastatakse ja selle asemel saadakse lisaks 50 pastapliiatsit. Seejuures tuli juurde maksta 25 krooni. Leida, milline oli pastapliiatsite ja võtmehoidjate hind, kui pastapliiatsite tellimisel rohkema kui 100 kaupa on allahindlus 10%.

5.9 Videolaenutust külastab tunnis ligikaudu konstante arv kliente. Kui laenus on avatud päevas 8 tundi, siis külastajate arv on maksimaalsest 92 võrra väiksem. Kui laenus on avatud 10 tundi päevas, on külastajate arv 46 võrra väiksem maksimaalsest. Kui suur on maksimaalne külastajate arv?

5.10 Urime loomaliha (l) ja sealiha (s) turgu. Tähistades loomaliha hinda p_l ja sealiha hinda p_s võime nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid välja kirjutada järgmiselt:

loomaliha nõutav kogus $D_l = 920 + 2p_s - 4p_l$;

sealiha nõutav kogus $D_s = 820 - 3p_s + p_l$;

loomaliha pakutav kogus $S_l = -60 + 32p_l$;

sealiha pakutav kogus $S_s = -50 + 15p_s$.

Leida hinnad, mille korral mõlemad turud on tasakaalus.

5.11 Uurime kolme asenduskauba turgu:

1. kauba nõutav kogus $D_1 = 23 - 5p_1 + p_2 + p_3$; pakutav kogus $S_1 = -8 + 6p_1$
 2. kauba nõutav kogus $D_2 = 15 + p_1 - 3p_2 + 2p_3$; pakutav kogus $S_2 = -11 + 3p_2$
 3. kauba nõutav kogus $D_3 = 19 + p_1 + 2p_2 - 4p_3$; pakutav kogus $S_3 = -5 + 3p_3$

Leida hinnad, mille korral kõik kolm turgu on tasakaalus.

5.12 *) Kasutades abitundmatuid, lahendada järgmine mittelineaarne võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{cases}$$

Determinantide kasutamine võrrandsüsteemi lahendamisel.

Keerulisemate võrrandsüsteemide lahendamiseks on kasulik kasutada **determinante**.

Teist järku determinandiks nimetatakse arvu D , mis saadakse neljast arvust koosnevast tabelist järgmise arvutuseeskirja abil:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Lineaarse võrrandsüsteemi
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

lahendamiseks **determinantide abil** leitakse kolm determinanti:

võrrandsüsteemi determinant
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

tundmatu x determinant
$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1;$$

tundmatu y determinant
$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Seejärel leitakse **võrrandsüsteemi lahend** nn Crameri¹ reegli järgi:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D}; \\ y = \frac{D_y}{D}. \end{cases}$$

NÄIDE 5.6. Võrrandsüsteemi lahendamine determinantide abil
 Kasutame determinante lk. 33 näites 5.3 saadud võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} 3x + y = 1750 \\ 2x + 4y = 4000 \end{cases}$$

¹Gabriel Cramer (1704 - 1752) – šveitsi matemaatik

lahendamiseks.

$$\text{Võrrandsüsteemi determinant} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

$$\text{Tundmatu } x \text{ determinant} \quad D_x = \begin{vmatrix} 1750 & 1 \\ 4000 & 4 \end{vmatrix} = 3000.$$

$$\text{Tundmatu } y \text{ determinant} \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1750 \\ 2 & 4000 \end{vmatrix} = 8500.$$

$$\text{Lahendid} \quad \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{3000}{10} = 300 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{8500}{10} = 850. \end{cases}$$

Crameri reegli järgi saab leida võrrandsüsteemi lahendit, kui $D \neq 0$. Kui

- ▶ kõik determinandid võrduvad nulliga ($D = D_x = D_y = 0$), on süsteemil **lõpmata palju lahendeid**;
- ▶ $D = 0$, aga $D_x \neq 0$ ja $D_y \neq 0$, siis **lahend puudub**.

Kui on tegemist kolme tundmatuga kolmest võrrandist koosneva süsteemiga,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

kasutatakse vastavalt kolmandat järku deteminante.

Kolmandat järku determinandi

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

väärtuse leidmiseks kasutatakse teist järku alamdeterminante:

$$\begin{aligned} A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

n tundmatuga n võrrandist koosneva lineaarse võrrandsüsteemi lahendamiseks kasutatakse n -järku determinante.

Determinantide meetodit on lihtne kasutada, kuna determinante on võimalik arvutada arvuti abil (näiteks *MS Excelis* funktsioon **MDETERM**).

ÜLESANDED

5.13 Leida teist järku determinantide väärtused:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 11 & -9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -10 & -30 \\ 20 & -10 \end{vmatrix}$$

5.14 Leida kolmandat järku determinantide väärtused:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

5.15 Kahe täiendkauba A ja B turu analüüs näitas, et

kauba A nõutav kogus $D_A = 410 - 5p_A - 2p_B$; kauba B nõutav kogus $D_B = 295 - p_A - 3p_B$;

kauba A pakutatav kogus $S_A = -60 + 3p_A$; kauba B pakutatav kogus $S_B = -120 + 2p_B$.

Leida hinnad, mille korral mõlema kauba turg on tasakaalus. Lahendamiseks kasutada determinante.

5.16 Lahendada determinantide abil järgmine kolmest võrrandist koosnev süsteem:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 52 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 72 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

5.17 Toodete X, Y ja Z ressursivajadused on toodud järgnevas tabelis:

Toode	Ressurss		
	A	B	C
X	3	3	1
Y	3	2	3
Z	2	0	1

Ressursside A, B ja C kogused on vastavalt 130; 85 ja 60. Leida toodete X, Y ja Z kogused, et kõik ressursid oleksid jäägitult kasutatud.

Võrrandsüsteemi graafiline lahendamine

II järku lineaarseid võrrandsüsteeme on võimalik lahendada ka graafiliselt. **Graafilise lahendamise** korral vaadeldakse mõlemat süsteemi võrrandit kui sirge võrrandit. Vastavate sirgete lõikepunkti koordinaadid ongi antud võrrandsüsteemi lahendiks.

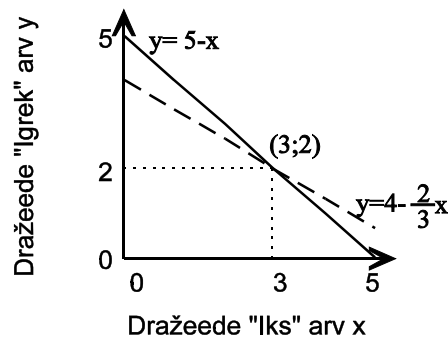
Lahendame lk. 31 näites toodud võrrandsüsteemi graafiliselt. Võrrandsüsteem, mis saadi:

$$\begin{cases} 10x + 10y = 50 \\ 20x + 30y = 120 \end{cases}$$

Sirgete konstrueerimiseks tuleb meil leida sirgete võrrandid ilmutatud kujul. Selleks avaldame mõlemast võrrandist y:

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 4 - \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Saadud võrrandite põhjal konstrueerime sirged. Sirgete lõikepunkt ongi koht, kus mõlemad võrrandid on rahuldatud (joonis 27).



Joonis 27

ÜLESANNETE VASTUSED

- 5.1 93; 82; 5.2 84; 72; 5.3 140 1-kroonist ja 70 5-kroonist; 5.4 Firma A aktsiaid 30 000 kr eest ja firma B aktsiaid 70 000 kr.
 5.5 5200 tavalist ja 1500 soodustusega; 5.6 A tüüpi laudu 32 tk ja B tüüpi laudu 72 tk 5.7 Odavamalt 100 l ja kallimat 80 l
 5.8 Pastapliiats 15 kr, võtmehoidja 5 krooni. 5.9 276 5.10 Sealiha 50 kr ja loomaliha 30 kr; 5.11 $p_1 = 4$ kr; $p_2 = 7$ kr ja $p_3 =$

6 kr. **5.12** $x = 3$; $y = 4$. **5.13** a) 23; b) 62; c) 700 **5.14** a) 99; b) -112 **5.15** Kauba A hind 40 kr ja kauba B hind 75 kr
5.16 $x_1 = 15$; $x_2 = 9$; $x_3 = 14$ **5.17, 8.21** X 25 tk, Y 5 tk ja Z 20 tk.

6. LINEAARSED FUNKTSIOONID

Võrdeline ja lineaarne seos.

NÄIDE 6.1. Võrdeline sõltuvus

Näituse avamisel hakati loendama külastajaid ja saadi järgmised tulemused:

Päevade arv p	1	2	3	4	5
Külastajate arv k	250	500	750	1000	1250

Võib öelda, et

- näitusel käinute arv **suureneb proportsionaalselt (võrdeliselt)** päevade arvuga;
- iga päevaga lisandub ühesugune ehk **konstantne** arv külastajaid;
- näituse külastajate arvu ja päevade arvu **suhe on jääv** (ühesugune, ei muutu):

$$\frac{k}{p} = 250 \quad \text{ehk} \quad k = 250p$$

Võrdeliseks sõltuvuseks nimetatakse kahe suuruse x ja y vahelist sõltuvust, mille korral nende jagatis on konstantne:

$$\frac{y}{x} = a$$

kus konstanti a nimetatakse **võrdeteguriks**.

Võrdelist sõltuvust **suurus y on võrdeline suurusega x** võib kirja panna ka kujul

$$y = ax$$

Näiteks

- kui tunnitasu on 75 krooni, siis summaarne töötasu T on võrdeline töötatud tundide arvuga t : $T = 75t$;
- saadud tulu R on võrdeline müüdud toodete arvuga q , võrdeteguriks on hind p : $R = pq$.

NÄITE järg. Kui näitus oli enne teises linnas ja seal oli käinud külastajaid 5000, siis summaarne külastajate arv s on
 $s = k + 5000$ ehk $s = 250p + 5000$.

Lineaarseks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mille avaldis on esitatav kujul

$$y = ax + b,$$

kus a ja b on konstantsed arvud.

Näiteks

- kulufunktsiooni kuju on tihti lineaarne $C(q) = aq + b$;
- nõutava koguse q ja hinna p vahel võib olla lineaarne seos $q(p) = -40p + 1000$;
- müüja töötasu T võib sõltuda läbimüügist q lineaarselt $T(q) = 0,15q + 1200$.

ÜLESANDED

6.1 Leida lineaarse funktsiooni kuju, kui

a) $a = 15$ $b = 23$

- b) $a = -24$ $b = -12$
 c) $a = 0$ $b = 9$
 d) $a = 12$ $b = 0$

6.2 Firma A käive oli 1993 aastal 100 000 kr. Käive suureneb igal aastal konstantse väärtuse, 20 000 kr võrra. Avaldada käive K kui aja t funktsioon, võttes 1993.a. $t = 0$. Leida käibe prognoositav väärtus aastal 1996.

6.3 Panga eraklientide arv oli aasta algul 10 000. Iga kuuga suureneb klientide arv 900 võrra. Kui suur on klientide arv aasta lõpuks?

6.4 Firma püsikulud olid eelmisel kuul 15000 kr ja kulud ühe toote kohta 55 kr. Leida firma kulufunktsioon.

6.5 Müüja töötasu on võrdeline läbimüügiga. Eelmisel kuul oli läbimüük 90 tuh kr ja müüja töötasu 4500 kr. Panna kirja müüja palgamudel.

6.6 Müüja kuupalk on 1500 kr kuus pluss 20 senti iga läbimüügi krooni kohta. Panna kirja müüja palgamudel.

6.7 *) Majandusteadlased on kindlaks teinud, et kui pakutav kogus ja nõutav kogus on erinevad, siis toote hind turul muutub kiirusega, mis on võrdeline nõutava koguse ja pakutava koguse vahega. Formuleerida see seos matemaatilise mudelina.

Lineaarse mudeli parameetrite leidmine

Lineaarne sõltuvus kahe suuruse vahel on lihtsaim sõltuvus ja seetõttu eeldatakse tihti, et uuritavat nähtust kirjeldav mudel on lineaarne ja esitatav kujul

$$y(x) = ax + b,$$

kus x on sõltumatu muutuja ja y sõltuv muutuja. Konstante a ja b nimetatakse **mudeli parameetriteks**.

Lineaarse mudeli parameetrite leidmisel vaadeldakse neid kui tundmatuid. Kuna tundmatuid on kaks, on nende leidmiseks vaja kahte võrrandit, mis moodustavad võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Teades sõltumatu muutuja väärtusi x_1 ja x_2 ning neile vastavaid sõltuva muutuja väärtusi y_1 ja y_2 , saab võrrandsüsteemi lahendada ning parameetrite a ja b väärtused leida.

NÄIDE 6.2. Lineaarse kulufunktsiooni parameetrite leidmine

Firma A kogukulud olid jaanuaris 70 000 kr ja veebruaris 77 500 kr. Tootmiskaht oli vastavalt 300 ühikut ja 350 ühikut. Eeldades, et kulufunktsioon on lineaarne ning püsikulud ja muutuvkulud tooteühiku kohta konstantsed, leida kulufunktsioon. Lahendus:

Lineaarse kulufunktsiooni üldkuju

$$C(q) = c_v q + C_F$$

kulud jaanuaris $C_1 = 70000$
 tootmiskaht jaanuaris $q_1 = 300$
 kulud veebruaris $C_2 = 77500$
 tootmiskaht veebruaris $q_2 = 350$
 püsikulu C_F
 muutuvkulu tooteühiku kohta c_v

Selline kulude mudel peab rahuldama nii jaanuarikuu kui ka veebruarikuu andmeid:

$$\begin{cases} C_1 = c_v q_1 + C_F \\ C_2 = c_v q_2 + C_F \end{cases}$$

Paneme võrranditesse sisse arvanded

$$\begin{cases} 70000 = c_v \cdot 300 + C_F \\ 77500 = c_v \cdot 350 + C_F \end{cases}$$

Saime lineaarse võrrandsüsteemi. Süsteemi lahendamiseks lahutame teisest võrrandist esimese, mille tulemusel saadud ühe tundmatuga võrrandist leiame ühe parameetri:

$$\begin{aligned} 7500 &= 50c_v & | :50 \\ 150 &= c_v \end{aligned}$$

Saadud väärtuse paneme võrrandsüsteemi esimesse võrrandisse ja leiame teise parameetri, püsikulu:

$$70000 = 150 \cdot 300 + C_F$$

$$70000 = 45000 + C_F$$

$$25000 = C_F$$

Nüüd paneme mõlemad parameetrid kulufunktsiooni üldkujusse ja ongi meil käes otsitav kulufunktsioon:

$$C(q) = 150q + 25000$$

ÜLESANDED

6.8 Müügiagentid sooritasid kutsesobivustesti. Aasta pärast võrreldi testi tulemusi müügiagentide aastase läbimüügiga. Sellel, kes sai 52 punkti, oli läbimüük 119 000 kr, 74 punkti saajal aga 163 000 kr. Oletades, et testil saadud punktide arvu ja läbimüügi suuruse vaheline seos on lineaarne, leida seda sõltuvust kirjeldav funktsioon.

6.9 Osteti 20 000 kroonine tööpink, mille väärtus langeb lineaarselt, nii et tema hind 10 aasta pärast on 1000 kr. Avaldada tööpingi väärtuse sõltuvust tema vanusest ja leida pingi väärtus 4 aasta pärast.

6.10 Turu-uuring näitab, et kui toote A hind on 5,50 kr langeb nõutav kogus 6750 ühikuni kuus. Kui hind on aga 3 kr, tõuseb ühes kuus nõutav kogus 10750 ühikuni. Sellise hinna juures ei suuda enamik tootjaid seda toodet enam toota ning pakutav kogus langeb 2250 ühikuni kuus. Seevastu hinna 15,50 kr juures on pakutav kogus 15750 ühikut. Millise hinna korral saabub antud toote turul tasakaal? Eeldada, et nii pakkumis- kui ka nõudlusfunktsioon on lineaarne

Sirge võrrand.

Lineaarse funktsiooni $y(x) = ax + b$ graafikuks on **sirge**, kus parameetreid a ja b nimetatakse järgmiselt:

- a **sirge tõus;**
- b **algordinaat.**

Näites 6.1 toodud lineaarse funktsiooni $s = 250p + 5000$ graafik on toodud joonisel 28.

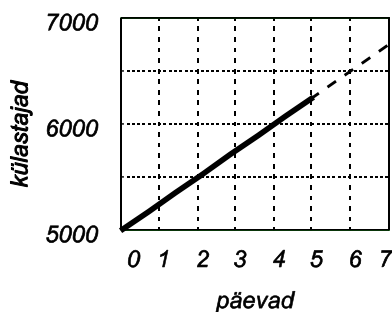
Sirge võrrandi **parameetrite tõlgendus** (vt. joonis 29):

- ▶ Sirge tõus a näitab, palju muutub suurus y , kui x muutub 1 võrra. Kui $x_2 = x_1 + 1$, siis

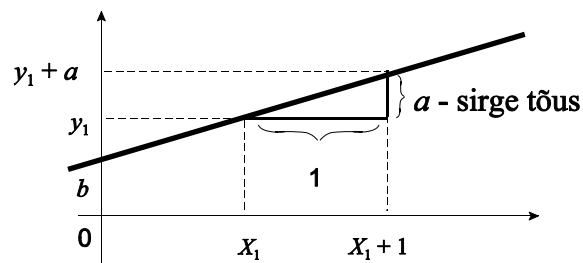
$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b = a(x_1 + 1) + b = ax_1 + a + b = (ax_1 + b) + a = y_1 + a$$

- ▶ Algordinaat b näitab suuruse y väärtust, kui $x = 0$, sest $y(0) = a \cdot 0 + b = b$.



Joonis 28
 $kõlastajad = 5000 + 250 \times \text{päevad}$



Joonis 29

NÄIDE 6.3. Kiiruse leidmine

Autoga sõites on ühtlase sõidu korral läbitud teepikkus võrdeline selle läbimiseks kulunud ajaga. Auto kiiruse leidmiseks tuleb läbitud teepikkus jagada selle läbimiseks kulunud ajaga:

$$\text{kiirus} = \frac{\text{teepikkuse muut}}{\text{aja muut}}$$

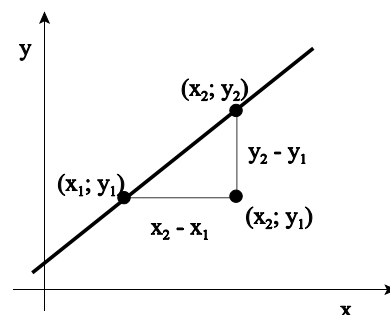
Tähistades teepikkuse muut Δs ja aja muut Δt , siis kiirus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Kui sirge läbib punkte $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$, siis sirge tõus

$$a = \frac{\text{suuruse } y \text{ muutus}}{\text{suuruse } x \text{ muutus}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ja vabaliige

$$b = y_1 - ax_1 \quad \text{või} \quad b = y_2 - ax_2$$



Joonis 30

NÄIDE 6.4. Tulufunktsioon lineaarse nõudlusfunktsiooni korral

Poodnik müüb fotoaparate hinnaga 950 kr/tk. Selle hinnaga ostetakse aparate 40 tk kuus. Müügi suurendamiseks planeerib poodnik hinda alandada ja arvestab, et 10 kroonine hinnaalandus suurendab läbimüüki 2 aparadi võrra. Avaldada läbimüügi sõltuvus hinnast ja leida, milline oleks läbimüük 900 kroonise hinna juures.

algne hind	$x_1 = 950$	$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{-10} = -0,2$
algne läbimüük	$y_1 = 40$	$b = y_1 - ax_1 = 40 - (-0,2 \cdot 950) = 40 + 190 = 230$
hinna muutus	$\Delta x = -10$	
läbimüügi muutus	$\Delta y = 2$	$y(x) = ax + b = -0,2x + 230$
		$y(900) = -0,2 \cdot 900 + 230 = -180 + 230 = 50$

Vastus: 900 kroonise hinnaga müüks poodnik 50 aparati kuus.

NÄIDE 6.5. Kahe sirge lõikepunkti leidmine.

Olgu meil 2 sirge võrrandid ilmutamata kujul. Sirge A võrrand on $7,5x + 5y - 600 = 0$ ja sirge B võrrand on $3,84x + 1,2y - 240 = 0$. Leida nende sirgete lõikepunkt.

Sirgete lõikepunkti koordinaadid peavad rahuldama mõlemat võrrandit, järelikult tuleb lahendada 2 tundmatuga kahest võrrandist koosnev võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} 7,5x + 5y - 600 = 0 \\ 3,84x + 1,2y - 240 = 0 \end{cases}$$

Viime vabaliikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$\begin{cases} 7,5x + 5y = 600 \\ 3,84x + 1,2y = 240 \end{cases}$$

Leiame determinandid: $D = \begin{vmatrix} 7,5 & 5 \\ 3,84 & 1,2 \end{vmatrix} = -10,2$; $D_x = \begin{vmatrix} 600 & 5 \\ 240 & 1,2 \end{vmatrix} = -480$; $D_y = \begin{vmatrix} 7,5 & 600 \\ 3,84 & 240 \end{vmatrix} = -504$.

Lahendid $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-480}{-10,2} \approx 47,059 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-504}{-10,2} \approx 49,412. \end{cases}$

Kontroll: Sirge A võrrand $7,5 \cdot 47,059 + 5 \cdot 49,412 - 600 = 0,0025 \approx 0$

Sirge B võrrand $3,84 \cdot 47,059 + 1,2 \cdot 49,412 - 240 = 0,00096 \approx 0$

Vastus: Sirged lõikuvad punktis $(47,059; 49,412)$.

ÜLESANDED

6.11 Tabelis on toodud 7 erinevat lineaarset funktsiooni Järgnevatel joonistel on toodud 7 erinevat sirget.

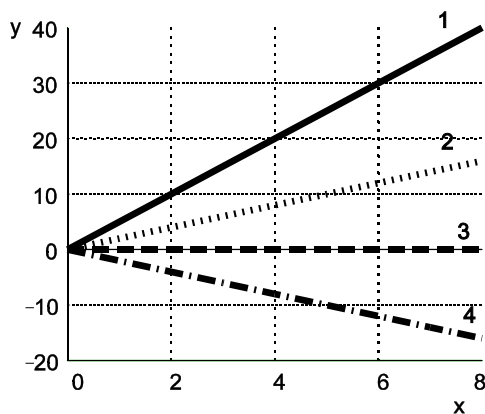
Teha kindlaks

a) Millisele funktsioonile vastab milline sirge.

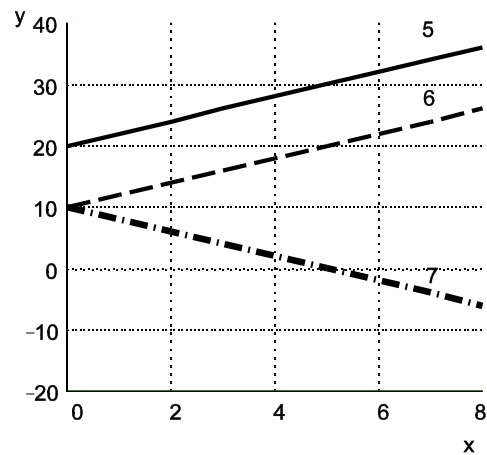
b) Mis on ühist sirgetel 2, 5 ja 6?

- c) Mis ühist on sirgetel 4 ja 7?
- d) Mis on ühist sirgetel 6 ja 7?

$y = ax + b$	
$y_1 = 2x$	$y_5 = -2x + 10$
$y_2 = 0$	$y_6 = 2x + 20$
$y_3 = 5x$	$y_7 = 2x + 10$
$y_4 = -2x$	



Joonis 31



Joonis 32

6.12 Teenindustevõtte osutas teenust 20 krooni eest, kuus osutati teenust 4000 kliendile. Kui hind tõsteti 25 kroonini, vähenes klientide arv 400 võrra. Kui suur oleks klientide arv olnud, kui hind oleks tõstetud 23 kroonini (Eeldame, et seos klientide arvu ja teenuse hinna vahel on lineaarne).

6.13 Ujumisklubi liikmemaks on 1500 kr 12-nädalase suveperioodi eest. Kui astuda klubisse peale suveperioodi algust, on liikmemaks proportsionaalselt väiksem. Avalda liikmemaksu sõltuvus nädalate arvust, mis on möödunud suveperioodi algusest ja leida maksu suurus, kui astuda klubisse 5 nädalat peale perioodi algust.

6.14 Tarbimismudelid näitavad, kuidas pere sissetuleku suurenedes muutuvad kulutused erinevat liiki kaupade/ teenuste ostmiseks. Enamasti kasutatakse lineaarset mudelit $y = ax + b$, kus x on sissetulek pereliikme kohta ja y kulutused vastavale kauba- või teenustegrupile. Kasutades Eesti pereuuringute andmeid 1994.a.IV kvartalist, on analüüsitud perede kulutusi erinevatele kaupadele ja teenustele ning nende sõltuvust rahalistest sissetulekutest pereliikme kohta. Analüüsi tulemusel on saadud järgmised tarbimismudelid:

kulutused toiduainetele (kr kuus) $K_1 = 0,109x + 215$;

kulutused tööstuskaupadele ja teenustele (kr kuus) $K_2 = 0,466x - 13,8$,

kus x on sissetulek pereliikme kohta kroonides.

- a) Kui suured on kulutused toidukaupadele sissetuleku puudumisel?
- b) Mida näitab arv 0,109 toiduainete tarbimismudelis?
- c) Kui sissetulek suurenes 1000 kr võrra, mitme krooni võrra suurenesid kulutused toidukaupadele ja mitme krooni võrra teenustele?
- d) Kuidas tõlgendada seda, et teenuste tarbimismudelil on vabaliige (algordinaat) negatiivne?
- e) Leida, millise sissetulekuga pered kulutasid toiduainetele sama palju kui tööstuskaupadele ja teenustele.

Eelarvejooned Sirge üldvõrrand

NÄIDE 6.6. Eelarve jooned

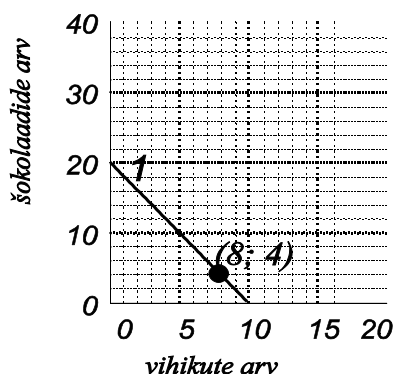
Koolipoisil on 40 kr. Poiss võib ära kulutada kogu raha, kusjuures tal on vaja osta 4 kroonised vihikuid, samuti tahab ta osta 2 krooniseid šokolaadimedaleid.

- a) Kui ta peab ostma 8 vihikut, mitu šokolaadi ta saab osta?
- b) Kas ta saab osta 12 vihikut, kui ta on oma sõbrale võlgu 5 šokolaadi ja võlg tuleb tasuda?
- c) Kui poisil on aga 60 krooni, kas ta siis saab osta 12 vihikut ja 5 šokolaadi?
- d) Kui tal 60 krooni, mitu šokolaadi saab poiss osta, kui ta ostab 8 vihikut?
- e) Kui poisil on 20 krooni ja ta ostab 3 šokolaadi, mitu vihikut ta siis osta saab?

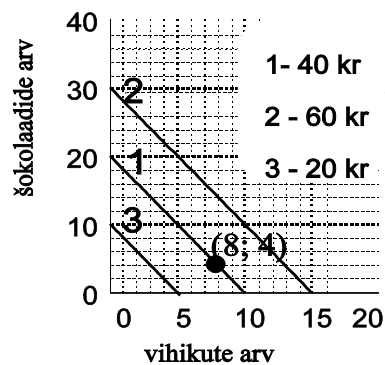
Olgu vihikute arv x ja šokolaadide arv y . Siis nendele kaupadele tehtud kulutuste summa on võrdne poisil oleva rahasumma (40 kr) suurusega:

$$4x + 2y = 40$$

See võrrand väljendab poisi kulutuste kitsendust.



Joonis 33



Joonis 34

I Lahendus: graafiline meetod.

Graafiku konstrueerimiseks on meil vaja saadud võrrandist avaldada (ehk ilmutada) suurus y :

$$2y = 40 - 4x \quad | :2$$

$$y = \frac{40}{2} - \frac{4}{2}x = 20 - 2x$$

Saime sirge võrrand $y(x) = 20 - 2x$, millele vastab sirge 1 joonisel 33.

Summa 60 krooni korral tuleb sirge 2 võrrandiks $y(x) = 30 - 2x$ ja 20 kr korral sirge 3 võrrandiga $y(x) = 10 - 2x$ (joonis 34).

Vastused küsimustele a) - e) leiame nüüd graafikutelt.

II lahendus: analüütiline meetod.

a) Kasutades suuruse y suhtes ilmutatud võrrandit $y(x) = 20 - 2x$ leiame šokolaadide arvu y , kui vihikute arv $x=8$:

$$y(8) = 20 - 2 \cdot 8 = 4.$$

Vastus: Kui koolipoiss peab ostma 8 vihikut, siis jääb tal raha üle 4 šokolaadi ostmiseks.

b) Leiame summaarsed kulud 12 vihiku ($x=12$) ja 5 šokolaadi korral ($y=5$):

$$4 \cdot 12 + 2 \cdot 5 = 58 > 40$$

Vastus: 40 krooniga 12 vihikut ja 5 šokolaadi osta ei saa, sest summaarsed kulud ületavad eelarve.

Selle näites on koolipoisil olev rahasumma kui **eelarve kitsendus** (*budget constraint*): tema rahaliste kulutuste summa ei saa ületada rahalisi sissetulekuid. Joonistel 33 ja 34 toodud sirged on tarbimisvõimaluste sirged ehk bilansisirged (*budget line*) ehk samakulu jooned (*isocost lines*). (Termin **samakulu joon** tähendab, et piki seda joont liikudes on summaarsed kulud konstantsed.)

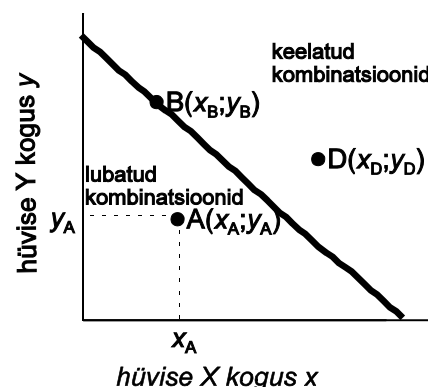
Eelarve kitsenduse analüüsimisel:

- hinnad p_x ja p_y on muutumatud;
- summaarsed kulud (eelarve) C on muutumatu;
- lubatud on vaid erinevad kombinatsioonid hüviste kogustest.

Kui me muudame eelarvet või hindu, on tegemist uue eelarve kitsendusega.

Joonisel 35 vastab igale punktile kindel kombinatsioon hüviste X ja Y kogustest x ja y :

- A korral jääb raha üle: $p_x x_A + p_y y_A < C$;
- B korral kulutatakse ära kogu eelarve: $p_x x_B + p_y y_B = C$;
- D pole lubatud, sest ületab eelarve: $p_x x_D + p_y y_D > C$.



Joonis 35

Lubatud on seega need kombinatsioonid, mille korral $p_x x + p_y y \leq C$.

Kui on antud **sirge üldvõrrand**

$$p_x x + p_y y = C,$$

siis sirge **ilmutatud võrrand** on

$$y(x) = ax + b$$

kus sirge tõus $a = -\frac{p_x}{p_y}$

ja vabaliige $b = \frac{C}{p_y}$.

Eelarve kitsendus avaldub võrrandina järgmiselt:

$$p_x x + p_y y = C,$$

kus x ja y on hüviste kogused, p_x ja p_y nende hinnad ja C summaarne rahasumma

Eelarve joonte kasutamist vt. ka raamatutes "Kerem, K., Randveer, M., Vensel, V. Mikroökoonoomika alusteooriad. Tln.Külim. 1996" lk. 79, "Mikroökoonoomika õpik. Tartu 1996" lk. 91.

Võrrand $p_x x + p_y y = C$ on sirge võrrandi **üldkuju** ehk **ilmutamata kuju**.
Avaldades suuruse y , saame:

$$y = -\frac{p_x}{p_y} x + \frac{C}{p_y}$$

võrdleme sirge võrrandi ilmutatud kujuga $y = ax + b$

Eelarve joone tõus on negatiivne (miks?) ja absoluutväärtuselt võrdne hüviste hindade suhtega. Saadud avaldise võib võrrelda raamatus "Mikroökoonoomika õpik. Tartu 1996" lk. 91 toodud valemitega.

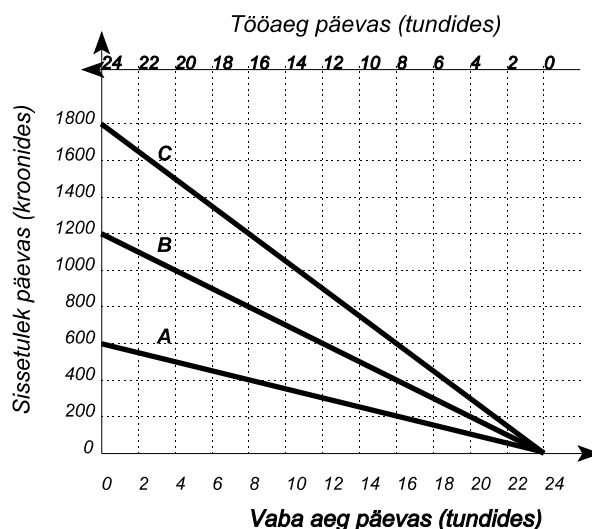
NÄIDE 6.7. Palgapiirangu sirge

Olgu töötaja A ainsaks sissetulekuallikaks tema töö, kusjuures tema tunnitasu on 25 kr. Joonisel 36 näitab palgapiirangu sirge A sel juhul kõiki erinevaid sissetuleku ja vaba aja kombinatsioone, mida antud töötaja võiks antud tunnitasuga realiseerida. Näiteks 16 tunni vaba aja korral on sissetulek 200 kr, 8 tunni vaba aja korral aga 400 kr. Võttes vaba aega 24 tundi, jääb ta sissetulekuta ja selleks, et saada 600 kr, peab ta loobuma vabast ajast.

Tähistades sissetulekut tähega S ja vaba aega tähega t , võib sirge A võrrandi kirjutada kujul $S(t) = 600 - 25t$.

Kui suur on tunnitasu töötajal B ja töötajal C?

Töö ja vaba aja vahel valiku tegemist uurib **tööjõu individuaalse pakkumise teooria**

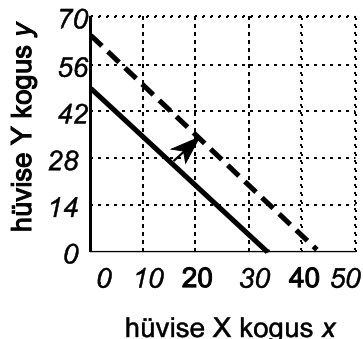


Joonis 36

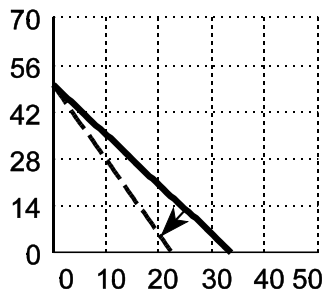
(Campbell, R. McConnell, Stanley L. Brue. Kaasaegne töö ja palga ökonomika. EMI Loengumapp nr. 4-18. Tln.1991).

NÄIDE 6.8. Eelarve joonte muutumine

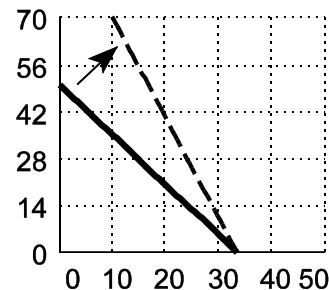
Olgu C eelarve suurus, p_x hüvise X hind ja p_y hüvise Y hind, x ja y hüvist kogused. Uurime, kuidas tarbimisvõimaluste sirge muudab oma asendit, kui muutub eelarve suurus või hüvise hind (vt. joonis 37).



Eelarve suureneb
 $C=1000$, $C'=1300$
 $p_x=30$
 $p_y=20$



Hüvise X hind suureneb
 $C=1000$
 $p_x=30$, $p_x=45$
 $p_y=20$



Hüvise Y hind väheneb
 $C=1000$
 $p_x=30$
 $p_y=20$, $p_y=10$

Joonis 37

ÜLESANDED

6.15 Toote A kokkupanekuks kulub töötajal 40 min., toote B kokkupanekuks 1h 30 min.

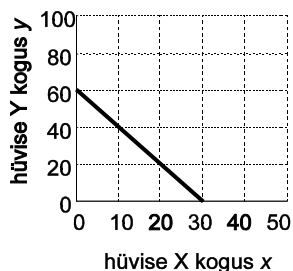
- a) Leida avaldis, mis seoks tööpäeva jooksul (8 tundi) kokkupanud toodete A ja B koguseid.
- b) Kui päevas tuleb kokku panna 6 toodet sordist A, mitme toote B jaoks jääb veel aega?
- c) Kas on võimalik kokku panna 5 toodet A ja 3 toodet B?

6.16 Kahe kauba peale, mille hinnad on vastavalt 30 kr ja 50 kr, on võimalik kulutada 1200 kr. Leida eelarvejoone võrrandilmutatud kujul:

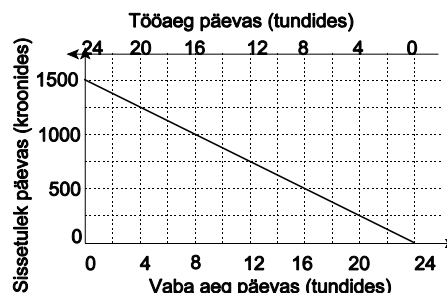
- a) antud hindade ja eelarve korral;
- b) eelarve on 25% väiksem;
- c) esimese kauba hind kahekordistub;
- d) teise kauba hind langeb 10 kr võrra.

Arvutil programmis MSExcel konstrueerida vastavad graafikud.

6.17 Leida, milline on joonisel 38 toodud eelarve joonele vastav eelarve väärtus ja hüvise X hind, kui hüvise Y hind on 45 kr.



Joonis 38



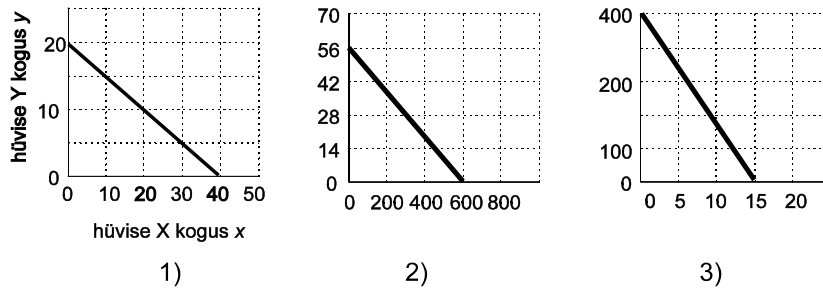
Joonis 39

6.18 Kui suur on joonisel 39 toodud palgapiirangu sirge korral tunnitasmäär ja kui palju vaba aega jääb, kui sissetuleku suuruseks valida 750 kr?

6.19 On toodud järgmised hindade ja eelarve variandid:

- a) eelarve on 9000 kr, hüvise X hind 15 kr;
- b) hüvise X hind on 5 kr ja hüvise Y hind 10 kr;
- c) hüvise X hind on 100 kr ja hüvise Y hind 3,75 kr.

Viia kokku antud eelarve variandid ja joonisel 40 toodud graafikud.



Joonis 40

6.20 Farmer kasvatab suuri ja väikeseid broilereid. Iga suure broileri üleskasvatamiseks kulub 20 kg sööta ja väikese jaoks 10 kg sööta.

- a) Leida seos broilerite arvu vahel, kui farmeril on sööta 1500 kg ja ta tahab kõik ära kulutada.
- b) Kui farmer tahab kasvatada 30 suurt broilerit, mitu väikest ta saab kasvatada?

6.21 Hüvise X hind on 120 kr ja hüvise Y hind on 500 kr. Peale hinnatõusu on hüvise X uus hind 170 kr. Kui suur peaks olema hüvise Y uus hind, et uus eelarve joon oleks vanaga paralleelne?

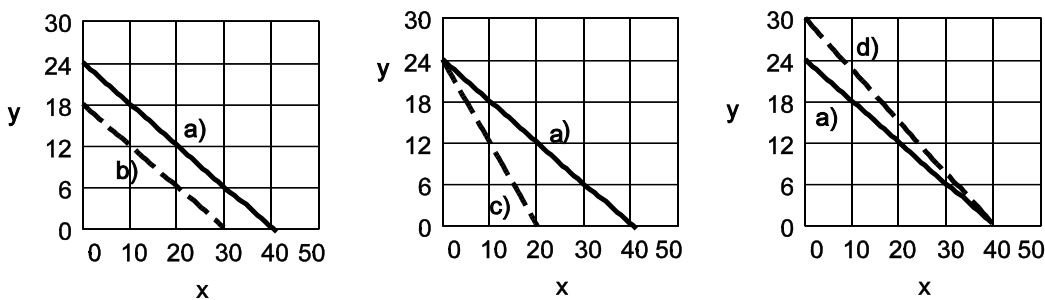
6.22 Katlamajas kasutatakse kas kivisütt (K) või gaasi (G). Kivisöe hind on 100 ja gaasi hind 500. Leida samakuljuoone võrrand, mis näitab erinevaid võimalusi kivisöe ja gaasi kulutamise kohta, kui

- a) summaarne kulu võib olla 10 000,
- b) summaarne kulu suureneb 50% ,
- c) gaasi hind alaneb 20%,
- d) kivisöe hind tõuseb 25%.

Arvutil konstueerida vastavad graafikud.

ÜLESANNETE VASTUSED

6.2 $K(t)=20\ 000t+100\ 000$; 160 000 kr; 6.3 20 800. 6.4 $C(q) = 15000 + 55q$, kus q on kogus. 6.5 Töötasu $T=0,05L$, kus L on läbimüük 6.6 Töötasu $T=1500+0,2L$, kus L on läbimüük 6.7 Kui nõutav kogus on D ja pakutav kogus S , siis hinna muutumise kiirus $v=k(D-S)$, kus k on võrdetegur. 6.8 $2000x+15\ 000$; 6.9 $y(x) = 20\ 000 - 1900x$; 12 400 kr. 6.10 6,17 kr. 6.12 3760 6.13 $y(x) = 1500 - 125x$; 875 kr; 6.14 a) 215 kr ; b) sissetuleku suurenedes 1 kr võrra suurenevad kulutused toidukaupadele 0,109 kr; c) 109 kr; d) teenustele hakatakse kulutusi tegema alates mingist sissetulekust, võrrandi lahendamisel saadakse, et alates 29,6 kr ; e) 640,9 kr 6.15 a) $40A + 90B = 480$; b) 2 toodet B; c) jaa. 6.16 Vt. joonis 41 6.17 2700 kr; 90 kr. 6.18 62,5 kr; 12 tundi. 6.20 a) $20x + 10y = 1500$; b) 90 väikest. 6.21 708,33 kr



Joonis 41

7. ELEMENTAARFUNKTSIOONE

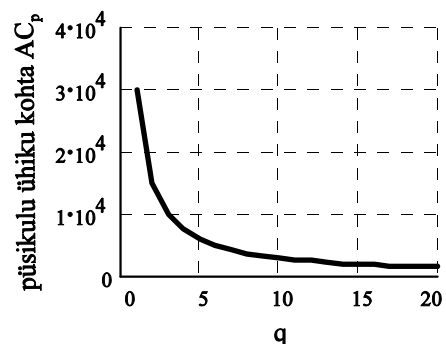
Pöördvõrdeline sõltuvus.

NÄIDE 7.1. Püsikulud tooteühiku kohta.

Olgu firma püsikulud 30 000 kr kuus. Leida püsikulud tooteühiku kohta ja uurida, kuidas see suurus sõltub kogusest q .

Lahendus: Tähistame püsikulusid $C_p = 30\ 000$. Püsikulud tooteühiku kohta saadakse püsikulude jagamisel tootmismahuga q :

$$AC_p = \frac{C_p}{q} = \frac{30000}{q}$$



Joonis 42

$AC_p(5) = 6000$, $AC_p(10) = 3000$. Seega tootmismahu suurenedes 2 korda püsikulud tooteühiku kohta vähenevad 2 korda. Tegemist on pöördvõrdelise sõltuvusega, mille graafik on toodud joonisel 42.

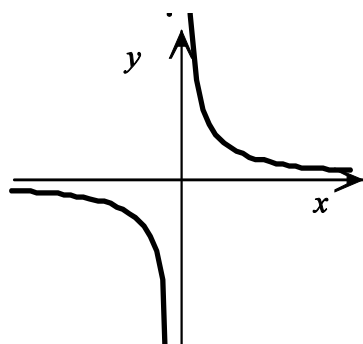
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on **hüperbool**. Hüperbool koosneb kahest harust, mis lähenevad piiramatult koordinaattelgedele (joonis 43).

Pöördvõrdeline sõltuvus kahe suuruse x ja y vahel on niisugune sõltuvus, mille korral nende suuruste korrutis on konstantne:

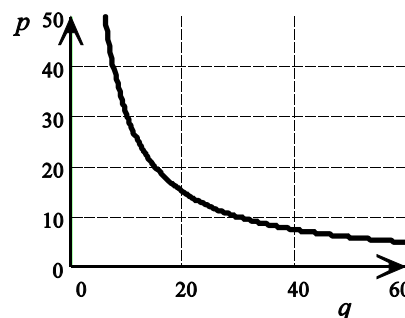
$$yx = a$$

Pöördvõrdelist seost saab esitada ka kujul

$$y = \frac{a}{x}$$



Joonis 43 Hüperbool



Joonis 44. Ühikelastne nõudlus

Kogutulu TR võrdub müüdud kaubakoguse q ja kaubaühiku hinna korrutisega p : $TR = qp$.

Kui kogutulu on konstantne, on ka kaubakoguse ja hinna korrutis konstantne ning tegemist on pöördvõrdelise sõltuvusega. Sellisel juhul on tegemist **ühikelastse nõudlusega**.

NÄIDE 7.2. Nõutava koguse ja hinna vaheline seos konstantse tulu korral

Urime hinna p ja koguse q vahelist seost, kui kogutulu on konstantne 300. Sellisel juhul hinna ja koguse korrutis $pq = 300$ ning hind on pöördvõrdeline kogusega: $p(q) = \frac{300}{q}$.

Tegemist on ühikelastse nõudlusega ning vastav graafik on toodud joonisel 44.

Ettevõtte juhtimise korral on oluline jälgida, millised on keskmised kulud tooteühiku kohta (*average cost per unit*). Raamatupidamises nimetatakse seda ka **keskmiseks omahinnaks**.

Keskmine kulu tooteühiku kohta

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q},$$

kus C on kulud ja q tootmismah.

Kui kulufunktsioon on lineaarne, $C(q) = c_v q + C_F$, siis keskmine kulu ühiku kohta

$$AC(q) = \frac{c_v q + C_F}{q} = \frac{c_v q}{q} + \frac{C_F}{q} = c_v + \frac{C_F}{q}$$

NÄIDE 7.3. Keskmine kulu tooteühiku kohta

Ettevõtte kulufunktsioon on $C = 150q + 5000$. Leida keskmised kulud tooteühiku kohta.

Lahendus.

$$AC = \frac{C}{q} = \frac{150q + 5000}{q} = \frac{150q}{q} + \frac{5000}{q} = 150 + \frac{5000}{q}$$

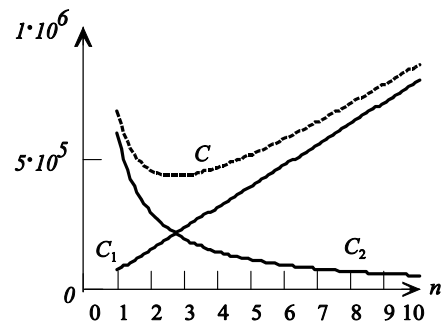
Vastus: Keskmised kulud tooteühiku kohta on $AC = 150 + \frac{5000}{q}$, kus q on tootmiskaht.

NÄIDE 7.4. Kogukulude mudel, lineaarne ja pöördvõrdeline osa.

Kiirtee hoolduskulud pika ajavahemiku peale koosnevad kahest osast. Üks osa kuludest on kapitalikulu hooldusjaamade rajamiseks, kus paiknevad hooldustööliste tööruumid ja hoitakse tee korrashoiuks vajaminevat tehnikat. See osa kuludest on võrdeline hooldusjaamade arvuga: $C_1 = an$, kus n on hooldusjaamade arv ja a konstant (ühe hooldusjaama rajamiskulud kroonides). Teise osa kuludest moodustavad igapäevased talitluskulud (tööjõu-, materjali-, kütusekulu) ja sõltuvad sellest, kui kaugemale tuleb hooldustöödele (tee puhastamine lumest, sildade hooldamine) sõita. Mida rohkem on hooldusjaamu, seda väiksemad need kulud on, sest seda vähem on vaja inimesi, ressursse ja tehnikat transportida. Need kulud võib algebraliselt avaldada pöördvõrdelise sõltuvusena hooldusjaamade arvust:

$C_2 = \frac{b}{n}$, kus b on konstant. Kogukulud on nende kahe komponendi summa:

$C = an + \frac{b}{n}$. Joonisel 45 on toodud mõlema kulukomponendi ja kogukulude



Joonis 45

graafikud, kui $a = 80\,000$ kr ja $b = 600\,000$ kr ning jaamade arv n muutub 1-st 10-ni. On näha, et kogukulud sõltuvad jaamade arvust n . Kiirtee operaatorfirma on huvitatud, et kogukulud oleksid minimaalsed.

a) Leia graafikult, mitu hooldusjaama oleks kasulik rajada.

b) Jooniselt on näha, et kogukulud on minimaalsed parajasti siis, kui mõlemad kulukomponendid on võrdsed, $C_1 = C_2$.

Lahendades vastava võrrandi, saame et optimaalne hooldusjaamade arv on $n = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{600\,000}{80\,000}} \approx 3$

ÜLESANDED

7.1 Firma kulude analüüs näitas, et kulufunktsioon $C(x) = 400x + 12\,000$, kus x on toodetud kogus. Leida keskmised kulud tooteühiku kohta.

7.2 Muutuvkulu ühiku kohta on 20 ja püsikulu 4000. Leida

- a) keskmine kulu tooteühiku kohta;
- b) kui palju muutub keskmine kulu ühiku kohta, kui tootmiskaht suureneb 100 ühikult 200 ühikuni;
- c) kui palju muutub keskmine kulu ühiku kohta, kui tootmiskaht suureneb 200 ühikult 300 ühikuni

7.3 Firma sai tellimuse 8000 mootorrattakiivriks. Tuleb muretseda seadmed, mis võimaldavad toota 30 kiivrit tunnis iga tööpingi kohta. Ühe tööpingi seadistuskulud on 200 kr. Peale tootmise käivitamist jälgib kogu liini üks inimene, kelle töötasu on 48 kr tunnis. Kulutusi töötasule võib nimetada talitluskuludeks.

- a) Avaldada kogukulude (seadistuskulud + talitluskulud) sõltuvus tööpinkide arvust.
- b) Kasutades näites 7.4 toodud loogikat, leida optimaalne tööpinkide arv.

7.4 Seadistuskuludeks (setup costs) nimetatakse seadmete ja tootmisruumide ettevalmistamiseks tehtavaid kulusid. Talitluskulud (operating costs) on objektide (hoonete, seadmete) kasutamisega seotud kulud. Olgu seadistuskulud võrdelised tööpinkide arvuga ja talitluskulud pöördvõrdelised tööpinkide arvuga. Avaldada kogukulude (seadistuskulud + talitluskulud) sõltuvus tööpinkide arvust.

7.5 Talitluskulud on pöördvõrdelised tööpinkide arvuga. Viie tööpingi kasutamisel on talitluskulud 7000 kr kuus. Leida talitluskulude sõltuvus tööpinkide arvust. Kui suured on talitluskulud seitsme tööpingi kasutamisel?

7.6 Kaubaveoki juhi töötasu on võrdeline teel oldud tundide arvuga. Kütusekulu 1 kilomeetri kohta on võrdeline sõidukiirusega. Leida, kuidas summaarsed kulud (töötasu + kulud kütusele) teatud vahemaa läbimisel sõltuvad sõidukiirusest.

7.7 Olgu näitleja X nõudlusfunktsioon $p = \frac{600\,000}{q}$, kus p on ühe filmi eest makstav tasu ja q filmide arv aastas.

- a) Kui näitleja saab ühe filmi eest 300 000 kr, mitmes filmis ta aasta jooksul näitleb?
- b) Kui näitleja tahab aastas osaleda neljas filmis, kui suurt hinda ta võib küsida?

7.8 Avaldada hinna p sõltuvus tootmiskahtust q , kui kogutulu on konstantne ja võrdub 450.

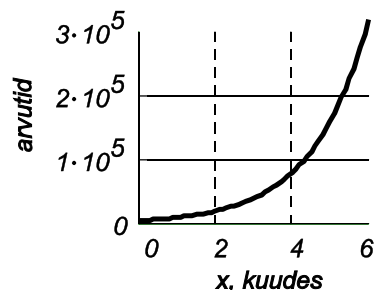
EkspONENTFUNKTSIOON.

NÄIDE 7.5. Internetiühenduste eksponentsiaalne kasv
 Ajakirjast "Arvutimaailm": "1996.a. algul oli Eestis Internetiga
 ühendatud 5000 arvutit ja nende arv kahekordistub iga kuuga."

Leiame, mitu Interneti ühendatud arvutit oleks sellisel juhul olnud
 Eestis 1996.a. juuli lõpus:

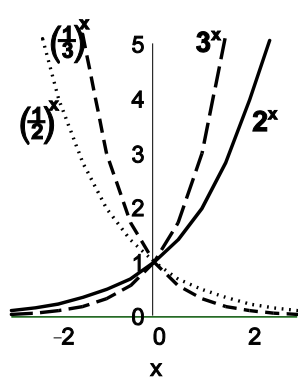
1 kuu pärast	$5000 \times 2 = 10000$
2 kuu pärast	$(5000 \times 2) \times 2 = 5000 \times 2^2 = 20000$
3 kuu pärast	$(5000 \times 2^2) \times 2 = 5000 \times 2^3 = 40000$
x kuu pärast	5000×2^x
6 kuu pärast	$5000 \times 2^6 = 320000$

Vastus: Sellise kasvutempo korral oleks juuli lõpus Eestis Interneti
 ühendust omanud 320 000 arvutit (vt joonis 46).



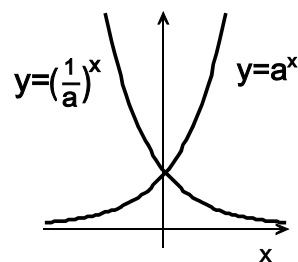
Joonis 46
 Internetiühendustega arvutid

Funktsiooni



$f(x) = 2^x$

Joonis 47

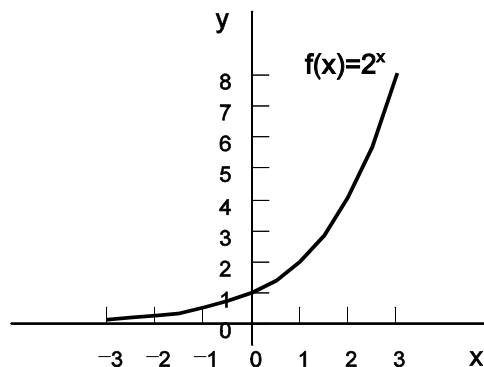


Joonis 48

nimetatakse **eksponentfunktsiooniks alusel 2.**

Jooniselt 49 on näha, et

- ▶ kui graafik lõikab y -telge ($x = 0$), siis
 $y(0) = 2^0 = 1$;
- ▶ liikudes x -telge mööda paremale, s.t. kui x
 läheneb positiivses osas lõpmatusse, läheneb
 ka 2^x lõpmatusse, s.t. kasvab piiramatult:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, s.t. kui x läheneb negatiivses osas
 lõpmatusse, läheneb 2^x nullile.



Joonis 49

Samasuguse analüüsi võime teha, võttes arvu 2
 asemel suvalise positiivse arvu (välja arvatud 1, sest $1^x = 1$ kõikide x väärtuste korral).

Näiteks $\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3^x ; $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (joonis 47).

Olgu a mingi positiivne arv, $a \neq 1$. Funktsiooni f kujul

$$f(x) = a^x$$

nimetatakse **eksponentfunktsiooniks alusel a** .

Eksponentfunktsiooni omadusi:

- ▶ Eksponentfunktsiooni väärtus on **positiivne** argumenti iga väärtuse korral.
- ▶ Kui $a > 1$, on eksponentfunktsioon $y = a^x$ rangelt **kasvav**, kui $0 < a < 1$, on see funktsioon rangelt **kahanev**.
- ▶ Iga eksponentfunktsiooni graafik läbib **punkti (0;1)**

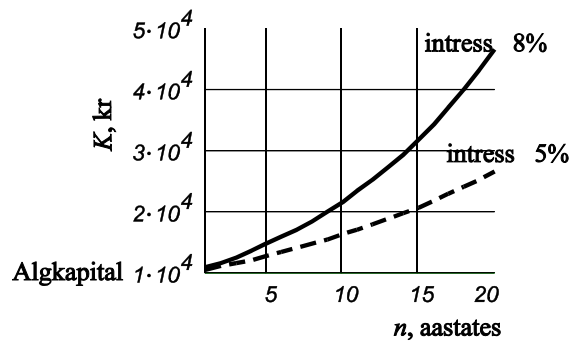
Funktsioonide $y = a^x$ ja $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ graafikud on **sümmeetrilised y- telje** suhtes (joonis 48). Seda sellepärast, et $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

NÄIDE 7.6. Liitintress eksponentfunktsioonina
Vaatleme kapitali tulevikuväärtuse arvutamise valemit liitintressi korral

$$K(n) = k(1+r)^n$$

See on eksponentfunktsioon alusel $(1+r)$ muutujaga n (perioodide arv) ja parameetritega k (kapitali olevikuväärtus) ning r (intressimäär perioodi kohta).

Joonisel 50 on toodud kapitali akumulatsiooni kõverad (kapitali olevikuväärtus $k=10\ 000$ kr) erinevate intressimäärade (5% ja 8%) korral.



Joonis 50
Kapitali akumulatsioon

$$K_1(n) = 10000 \cdot 1,05^n$$

$$K_2(n) = 10000 \cdot 1,08^n$$

Amortisatsioon on põhivara (seadmete, tootmishoonete) väärtuse järkjärguline kandmine kuludesse, mille tõttu nende jääkväärtus (väärtus peale amortisatsioonieraldise mahaarvamist) väheneb.

NÄIDE 7.7. Amortisatsioon

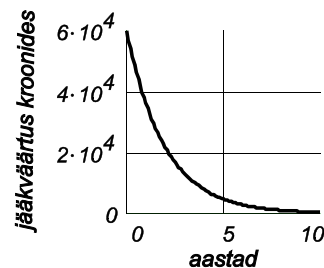
Firma soetab põhivara maksumusega 60 000 kr. Uurida jääkväärtuse muutumist aastate jooksul, kui amortisatsioonimäär on 40% aastas.
Lahendus: Esimese aasta kohta on amortisatsioon $40\% \cdot 60000$. Jääkväärtus on siis $60\% \cdot 60000$.

Teisel aastal on amortisatsioon 40% jääkväärtusest : $40\% \cdot (60\% \cdot 60000)$, järele jääb 60% jääkväärtusest: $60\% \cdot (60\% \cdot 60000) = 60000 \cdot 0,6^2$.

Üldistades seda analüüsi saame, et jääkväärtuse J sõltuvust ajast t kirjeldab eksponentfunktsioon

$$J(t) = 60000 \cdot 0,6^t$$

Selle funktsiooni muutumist kujutab graafik joonisel 51.



Joonis 51
Amortisatsioon

ÜLESANDED

7.9 Milline märkidest kehtib: $>$, $<$, või $=$?

$$2,7^2 \dots 2,7^3 \quad 0,2^2 \dots 0,2^4 \quad -3^2 \dots 3^{-2} \quad 2^{10} \dots 4^5 \quad -25^6 \dots -125^2$$

7.10 Skitseerida järgmiste funktsioonide graafikud. (Näpunäide: Leida ja kanda teljestikku y väärtused näiteks selliste x väärtuste korral: (...; -1; 0; 1; ...)

a) $y = 4^x$ b) $y = 0,25^x$ c) $y = (-2)^x$

7.11 Kontorisse osteti arvuti, mis maksis 25 000 kr. Amortisatsioonimääraks on 30% aastas.

- a) Leida jääkväärtuse sõltuvus ajast.
- b) Leida, milline on arvuti jääkväärtus 1; 2 ja 3 aasta pärast.

7.12 Kauba alghind on 700 krooni. Iga 10 päeva pärast hinnatakse kaup alla 20%. Kui suur on kauba hind 40 päeva pärast?

7.13 Möödunud aastal oli firma käive 150 000 krooni. Kui suur peaks käive olema 6 aasta pärast, kui iga-aastaseks juurdekasvuks planeeritakse 8%?

7.14 Leida avaldis lõppkapitali K arvutamiseks t aasta pärast, kui algkapital on k , aastane intressimäär on r ja intress lisatakse sagedusega m korda aastas.

Arv e. Pidev juurdekasv.

Ülesandes 7.14 saadud tulemuse põhjal:

Kui algkapital on k , aastane intressimäär r ja intressi arvutatakse m korda aastas, avaldub lõppkapital K järgmiselt

$$K = k \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}$$

Intressi lisamise sageduse m suurenedes suureneb ka lõppkapital. Uurime, mis juhtub, kui intressi lisamise sagedus läheneb lõpmatusele.

Võtame kasutusele tähistuse $a = \frac{m}{r}$. Siis $m = ar$ ja

$$K = k \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt} = k \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{art} = k \left[\left(1 + \frac{1}{a} \right)^a \right]^{rt}$$

Leiame avaldise $\left(1 + \frac{1}{a} \right)^a$ väärtuse järgmiste a väärtuste korral:

a	1	2	10	100	1000	10000	100000
väärtus	2	2,25	2,59374246	2,70481383	2,71692393	2,71814593	2,71826824

Arvu a tõkestamatul kasvamisel läheneb see avaldis mingile konkreetsele arvule. Arvu

$$e = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^a = 2,718281828459\dots$$

nimetatakse Euleri arvuks (matemaatik Leonhard Euler, 1707-1783).

Intresside pideva juurdearvestuse meetodi korral lõppkapital

$$K(t) = k e^{rt}$$

kus k on algkapital, r aastane intressimäär ja t arvestatavate aastate arv.

ÜLESANDED

7.15 Leida lõppkapitali suurus 5 aasta pärast, kui algkapital on 10 000 kr, aastane intressimäär 6% ja intressi arvutatakse pideva juurdearvestuse meetodil.

7.16 10 000 krooni on investeeritud aastase intressimääraga 7%. Leida lõppkapitali väärtus 10 aasta pärast (10 kroonise täpsusega), kui intressi lisamine toimub

- a) 1 kord aastas; b) 1 kord kvartalis; c) 1 kord kuus; d) pidevalt.

7.17 Teil on 30 000 krooni, millest poole paigutate pank A, kus intresse makstakse iga kvartali järel, teise poole panete aga pank B, kus intresse makstakse pideva juurdearvestusega. Kui palju teenite teises pangas rohkem, kui intressimäär on mõlemas pangas 5% ja hoiuaeg 3 aastat?

7.18 Kapital on investeeritud fikseeritud intressiga ja intressi juurdearvestamine toimub pidevalt. 10 aasta pärast on kapital kahekordistunud. Mitmekordseks kasvab kapital 20 aastaga?

7.19 Kui suur peab olema algkapital, et intresside pideva juurdekasvu meetodil aastase intressimäära 8% korral oleks lõppkapital 10 aasta pärast 10 000 kr?

Eksponeentsiaalsed mudelid

Mitmesuguste **juurdekasvu mudelite** uurimisel kasutatakse eksponentfunktsiooni, mille aluseks on arv e .

Pidevat kasvu kirjeldab funktsioon

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

kus y_0 ja k on konstandid ehk **mudeli parameetrid**.

Seda funktsiooni kutsutakse ka **pideva kasvu funktsiooniks**. Kui mingi suuruse muutus ajas sõltub selle suuruse väärtusest antud hetkel, kirjeldab suuruse muutumist eespool toodud funktsioon.

Näiteks rahvaarvu muutus sõltub rahvaarvu suurusest.

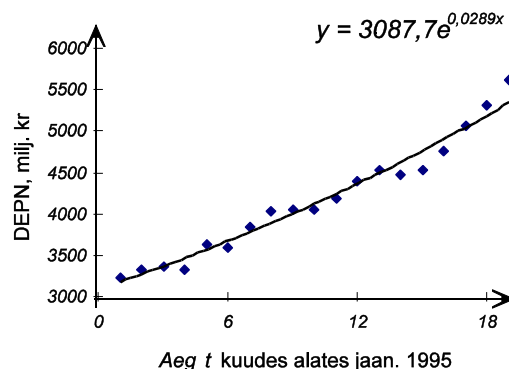
Suuruse x väärtuse 0 korral $y(0) = y_0 e^0 = y_0$, seepärast nimetatakse konstanti y_0 ka suuruse y **algväärtuseks**.

Suuruse tegeliku väärtuse y' ja mudeli abil arvatud väärtuse y vahe on mudeli **absoluutne viga** vastavas punktis, $\Delta y = y' - y$.

Suhteline viga $\frac{\Delta y}{y}$ näitab, mitu protsenti absoluutne viga moodustab suuruse väärtusest.

NÄIDE 7.8. Eesti finantssektori eksponeentsiaalsed mudelid. Aastatel 1995-1996 oli nõudmiseni deposiitide DEPN (elanike ja ettevõtete hoiused) kasv Eestis eksponeentsiaalne. Olgu y nõudmiseni deposiidid miljonites kroonides ja t aeg kuudes (jaanuar 1995 $t = 1$). Sellisel juhul võib vastava eksponeentsiaalse mudeli kirja panna järgmiselt:

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$



Joonis 52 Deposiitide muutus ajas

Mudeli parameetrite leidmisel kasutati Eesti Panga andmeid nõudmiseni deposiitide kohta ajavahemikul jaanuar 1995 kuni juuli 1996. Andmeid töödeldi statistiliste meetoditega (regressioonanalüüs) ja leiti mudeli parameetrite arvvaartused:

$$y_0 = 3087,7$$

$$k = 0,0289.$$

Seega vastaval ajavahemikul kirjeldas nõudmiseni deposiitide kasvu Eestis mudel $y(t) = 3087,7 e^{0,0289t}$ Joonisel 52 tähistavad punktid tegelikke andmeid ja pidev joon mudeli käitumist.

Demograafiast on teada, et kui mingi piirkonna **rahvaarvu muutumist** mõjutab vaid loomulik iive (sünnid ja surmad), kirjeldab seda mudel $N(t) = N_0 e^{kt}$, kus $N(t)$ on rahvaarv ajahetkel t ja N_0 rahvaarv ajahetkel $t = 0$.

NÄIDE 7.9. Maakera rahvaarv

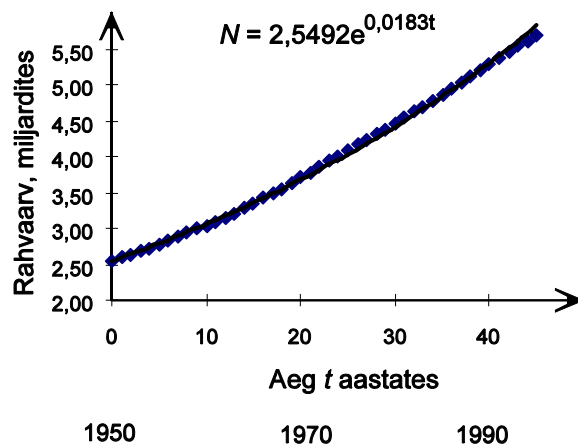
Kasutades andmeid maakera rahvaarvu kohta aastatel 1950-1995 (allikas U.S. Bureau of the Census, International Data Base), on leitud eksponentsiaalse mudeli parameetrid N_0 ja k :

$$N_0 = 2,5492$$

$$k = 0,0183$$

Seega maakera rahvaarvu $N(t)$ (miljardit inimest) sõltuvust aastate arvust t ($t = 0$ aastal 1950) kirjeldab mudel:

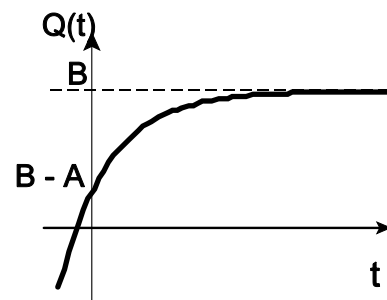
$$N(t) = 2,5492 e^{0,0183t} \quad (\text{vt joonis 53})$$



Joonis 53 Maakera rahvastik 1950-1995

Funktsiooni $Q(t) = B - A e^{-kt}$, (A , B ja k on positiivsed konstandid) graafikut (joonis 54) nimetatakse **õppimiskõveraks**. Psühholoogide poolt on kindlaks tehtud, et sellise kujuga funktsioon kirjeldab seost mingi ülesande sooritamise efektiivsuse Q ning harjutamise mahu t vahel. Omadused:

- ▶ Kui $t = 0$, siis $Q(0) = B - A$
- ▶ Kui t kasvab piiramatult, läheneb e^{-kt} nullile ja Q läheneb suurusele B : $\lim_{t \rightarrow \infty} Q = B$. See tähendab, et töötaja



Joonis 54 Õppimiskõver

töoeffektiivsusel on teatud piir ja selle lähedal mõjutab treenimine vähe efektiivsuse suurenemist.

NÄIDE 7.10. Töö efektiivsuskõver

Postitöötaja kiirus kirjade sorteerimisel sõltub tema töökogemusest. Kirjeldagu mudel $n(t) = 700 - 400 e^{-0,5t}$ keskmise töötaja kiirust kirjade sorteerimisel, kus n on tunnis sorteeritud kirjade arv ja t töötaja tööstaaž kuudes. Leida

- a) Mitu kirja tunnis sorteerib uus töötaja?
- b) Mitu kirja tunnis sorteerib töötaja peale 6 kuud töötamist?
- c) Leida ligikaudselt, mitu kirja tunnis sorteerib keskmine töötaja.

Lahendus:

- a) Uue töötaja korral tööstaaž on null ja $n(0) = 700 - 400 = 300$ kirja tunnis
- b) $t = 6$; $n(6) = 700 - 400 e^{-0,5 \cdot 6} \approx 680$ kirja tunnis
- c) Kui tööstaaž t kasvab piiramatult, läheneb arv n suurusele 700, $\lim_{t \rightarrow \infty} n = 700$. Seega keskmine töötaja, kelle tööstaaž on küllaltki pikk, sorteerib keskmiselt 700 kirja tunnis.

ÜLESANDED

7.20 Riigi A sisemajanduse kogutoodang SKT oli 1980. a 100 miljardit dollarit ja 1990 aastal 180 miljardit dollarit. Eeldades, et SKT kasv on eksponentsiaalne, prognoosida SKT väärtust aastal 2000.

7.21 Teades, et 1996. a märtsis oli nõudmiseni deposiitide suurus Eestis 4536,3 milj. kr, leida näites 7.8 toodud mudeli suhteline viga 1996.a. märtsis.

7.22 Riigi A rahvastiku kasvu mudelit kirjeldab funktsioon $N(t) = N_0 e^{0,02t}$, kus N_0 on rahvaarv praegu ja $N(t)$ on rahvaarv t aasta pärast. Leida rahvaarv 20 aasta pärast, kui praegu elab seal 3 000 000 inimest.

7.23 Mitmetes kolmanda maailma maades on rahvastiku keskmine juurdekasv 3,2% aastas. Kui riigi Z rahvaarv on praegu 1 000 000, kui suur see 20 aasta pärast?

7.24 Firma X toodab köögikombaine. Statistiline analüüs näitab, et t aasta pärast on töökorras olevate köögikombainide osakaal ligikaudu $f(t) = e^{-0,2t}$. Leida

- kui suur osa köögikombainidest töötavad vähemalt 3 aastat;
- kui suur osa nimetatud toodetest langevad rivist välja kolmandal tööaastal.

7.25 Töötajal, kes on tööl olnud t nädalat, on päevane töömaht $Q(t) = 40 - A e^{-kt}$ ühikut. Päril alguses suudab töötaja toota 20 toodet päevas, 1 nädala pärast 30 toodet päevas. Kui suur on töömaht 3 nädala pärast?

Logaritmid

Leiame arvu x , nii et $3^x = 9$. Peast võib öelda, et $x = 2$. Leiame nüüd aga sellise arvu x , mille korral $3^x = 6$. Sellise võrrandi lahendit nimetatakse arvu 6 **logaritmiks** alusel 3: $x = \log_3 6 \approx 1,631$.

Kontrollime: $3^{1,631} = 6$.

Arvu b **logaritmiks** alusel a nimetatakse arvu c , millega alust a astendades saadakse arv b

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$$

Näiteks $\log_2 8 = 3$, sest $2^3 = 8$; $\log_6 36 = 2$, sest $6^2 = 36$; $\log_4 0,25 = -1$, sest $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Logaritme alusel 10 nimetatakse **kümnendlogaritmideks** ja nende korral jäetakse alus märkimata:

$$\log x = \log_{10} x$$

Logaritme alusel e nimetatakse **naturaallogaritmideks** ja tähistatakse järgmiselt:

$$\ln x = \log_e x$$

Omadused:

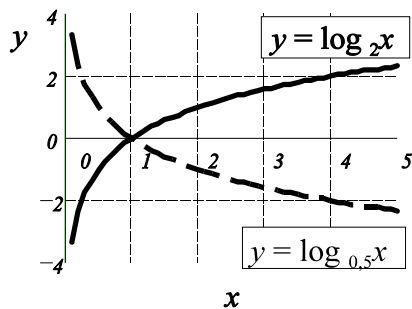
- ▶ Arvu 1 logaritm mistahes alusel on null.
 $\log_a 1 = 0$, sest suvaline arv astmel 0 on 1: $a^0 = 1$.
- ▶ Logaritm logaritmi alusest on 1.
 $\log_a a = 1$, sest selleks et saada arvu a , tuleb arv a võtta astmesse 1, $a^1 = a$.
- ▶ Logaritmi saab leida vaid positiivsest arvust.

Kuna kalkulaatoriga on võimalik leida vaid kümnend- ja naturaallogaritm, tuleb näiteks $\log_3 6$ leidmiseks teisendada see kümnendlogaritmideks. Selleks kasutatakse ülemineku valemit.

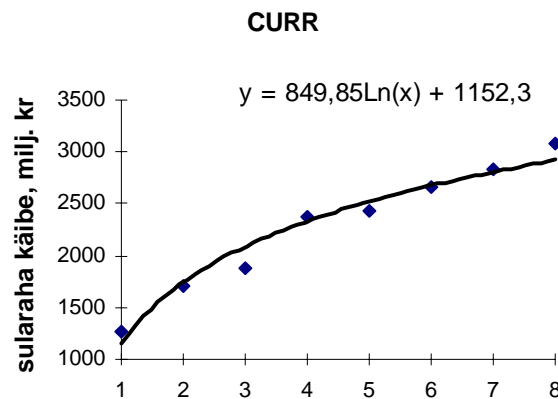
Üleminek logaritmi aluselt a teisele alusele c toimub järgmise seosega

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Näiteks $\log_3 6 = \frac{\log 6}{\log 3}$. Võime üle minna ka alusele e , s.t. naturaallogaritmidele $\log_3 6 = \frac{\ln 6}{\ln 3}$.



Joonis 55



Aeg x kvartalites, 1993. a. I kv. x=1

Joonis 56

NÄIDE 7.11. Perioodide arvu leidmine liitintressi korral
 Leida, mitme aasta pärast on üks kroon kasvanud kaheks krooniks, kui keskmiseks turuintressimääraks võtta 9%?
 Lahendus: Kasutame liitintressi arvutamise valemit:

intressimäär	$r = 0,09$		$K = k(1 + r)^n$	
algkapital	$k = 1$		$2 = 1 \cdot 1,09^n$	
lõppkapital	$K = 2$			
perioodide arv	$n = ?$		$n = \log_{1,09} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,09} \approx 8$	läheme üle kümnendlogaritmidle

Kontroll: $1,09^8 \approx 2$

Vastus: Sellise intressimääraga korral kroon kahekordistub 8 aastaga.

Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmidde summaga

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Näiteks $\log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$.

Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmidde vahega

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Näiteks $\log_3 \frac{27}{9} = \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$

Astme logaritm võrdub astendaja ja astendatava logaritmi korrutisega $\log_a(b^n) = n \log_a b$

Näiteks $\log_4(16^5) = 5 \log_4 16 = 5 \cdot 2 = 10$

Logaritmfunksiooniks nimetatakse funktsiooni

$$y(x) = \log_a x$$

Omadused (vt joonis 55):

- ▶ Logaritmfunksiooni graafik läbib punkte (1;0) ja (a;1).
- ▶ Kui $a > 1$, siis on logaritmfunksioon kasvav, kui $0 < a < 1$, siis on logaritmfunksioon kahanev.
- ▶ Logaritmfunksioonide $y = \log_a x$ ja $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ graafikud on sümmeetrilised x -telje suhtes.

NÄIDE 7.12. Logaritmiline kasv Eesti pangandussektoris

Aastatel 1993-1994 võib Eesti pangandussektorit kajastavate mõningate näitajate ajafunktsioone kirjeldada logaritmilise kasvu mudeliga. (Paas, T. Majandusprotsesside modelleerimine. Tartu, 1996). Joonisel 56 on toodud käibel oleva sularaha hulga muutumine. Punktid tähistavad tegelikke väärtusi, pidev joon mudeli põhjal arvutatud väärtusi.

Logaritmilise mudeli üldkuju on

$$y = a \ln x + b$$

kus a ja b on mudeli parameetrid.

ÜLESANDED

7.26 Leida (peast)

$$\log_{10} 100 \quad \log_{10} 1000 \quad \log_5 25 \quad \log_7 7 \quad \ln e \quad \ln (e^2) \quad \log_3 (3^2) \quad \log_6 (6')$$

$$\log_{17} 1 \quad \log 0,1 \quad \log_2 0,5$$

7.27 Leida x .

$$\log x = 4 \quad \log (x + 5) = 2 \quad \log_x 9 = 2$$

7.28 Arvutada (kalkulaatoriga) saja tuhandiku täpsusega.

$$\log 25 \quad \log 8000 \quad \log 0,5 \quad \log (-10) \quad \ln 5$$

7.29 Arvutada (kalkulaatoriga) saja tuhandiku täpsusega.

$$\log_2 5 \quad \log_3 20 \quad \log_{20} 0,2$$

7.30 Kui kauaks tuleks hoiustada 10 000 kr, et see kasvaks summani 15 000 kr, kui aastane intressimäär on 9% ja intress kantakse arvele iga aasta lõpul. Kui aga intress lisatakse iga kuu? Kontrollida saadud vastuseid!

7.31 Uue luksusauto hind on 500 000 kr. Aastas kaotab auto amortisatsiooni tõttu 15% oma väärtusest. Tonn vanametalli maksab 5000 kr. Mitme aasta pärast on auto hind võrdne ühe tonni vanametalli hinnaga?

7.32 Riitusesse maksis komisjonipoes 1700 kr. Järgmine kord poodi minnes oli eseme hind 717,20 kr. Mitu korda oli kaup alla hinnatud, kui on teada, et iga kord oli allahindlusprotsent 25%?

7.33 Pangas on 1 000 000 kr. Mitmeks aastaks seda raha jätkub, kui iga kuu välja võtta 10 000 kr. Aastane intressimäär on 8% ja intress lisatakse iga kuu lõpul.

EkspONENTVÕRRANDID

Logaritme kasutatakse **eksponentvõrrandite** lahendamisel.

NÄIDE 7.13. EkspONENTVÕRRANDI lahendamine

Piirkonna elanike arv oli 1985.a. 10 000 ja 1987.a. 11 000. Leida rahvaarvu mudel kujul $y(t) = Ce^{rt}$, kus t on 1985.a-st möödunud aastate arv. Milline oli rahvaarv aastal 1995?

Lahendus:

Mudeli leidmiseks tuleb antud andmete põhjal leida suurused C ja r .

$t_1 = 0$	$t_1 = 0:$	$10\ 000 = Ce^{r \cdot 0}$
$y_1 = 10\ 000$		$10\ 000 = Ce^0$
$t_2 = 2$		$10\ 000 = C$
$y_2 = 11\ 000$		

$$\begin{aligned}
 t_2 = 2: \quad & 11\,000 = 10\,000 e^{r \cdot 2} \quad | :10\,000 \\
 & \frac{11\,000}{10\,000} = e^{2r} \\
 & 1,1 = e^{2r} \quad | \text{logaritmime võrrandi mõlemat poolt} \\
 & \ln 1,1 = 2r \quad | :2 \\
 & \frac{\ln 1,1}{2} = r \\
 & r = 0,048
 \end{aligned}$$

Vastus: Rahvaarvu muutumist kirjeldab funktsioon $y(t) = 10\,000 e^{0,048t}$.
 Aastal 1995 $t = 10$ ja elanike arv $y = 10\,000 e^{0,048 \cdot 10} \approx 16\,160$.

ÜLESANDED

7.34 Maakera rahvastiku arv oli 1984.a. ligikaudu 4,77 miljardit ja 1986.a. 4,94 miljardit. Leida rahvaarvu sõltuvus ajast t (võtta 1984.a. $t = 0$). Ennustada rahvaarvu suurust aastal 2050. Millal jõuab rahvaarv 100 miljardini?

7.35 Firma läbimüük oli 1985.a. 100 000 kr ja 1990.a. 739 000 kr. Eeldades, et läbimüük kasvab pidevalt, leida funktsioon, mis kirjeldab firma aastase läbimüügi kasvu. Milline oli läbimüük aastal 1987? Millal kasvab läbimüük 15 miljoni kroonini aastas?

7.36 Inflatsiooni tõttu langeb dollari ostujõud 10% aastas. Leida funktsioon, mis kirjeldab dollari ostujõu muutumist võrreldes praeguse dollariga. Leida, mitu protsenti on dollar oma ostujõust kaotanud 10 aasta pärast?

7.37 Õpilaste grupile õpetatakse arvuti kasutamist. 10 päeva pärast mäletavad õpilased ühte viiendikku õpitut võtetest. Leida mudel, mis kirjeldab omandatud võtete meespidamise sõltuvust ajast. Arvestades, et meelde jäänud võtete arv väheneb ajas eksponentsiaalselt, prognoosida, milline on meelde jäänud võtete protsent 2 nädala pärast.

7.38 Algaja kassapidaja suudab teenindada 40 ostjat tunnis. 1 kuu pärast suudab ta teenindada 50 ostjat tunnis. Kogenud kassapidaja teenindab 100 ostjat tunnis. Leida, kuidas ostjate teenindamise kiirus sõltub kassapidaja tööstaažist. Leida, mitu ostjat suudab teenindada müüa, kes on töötanud 2 kuud; 3 kuud. Näpunäide: otsida mudelit kujul $y(t) = a - ce^{kt}$.

7.39 Linnakese elanike arv oli 1980.a. 10 000 ja elanike juurdekasv on 3% aastas. Leida elanike arvu juurdekasvu mudel ning elanike arv aastal 2000.

ÜLESANNETE VASTUSED

7.2 b) väheneb 20 võrra; c) väheneb 6,7 võrra. 7.3 a) $C(n) = 200n + \frac{12800}{n}$; b) 8 7.4 $an + \frac{b}{n}$, kus n on tööpinkide arv ning a

ja b konstandid. 7.5 $C_{\text{talitus}} = \frac{35000}{n}$, kus n on tööpinkide arv. 5000 kr. 7.6 $C = s(\frac{a}{v} + bv)$, kus s on teepikkus, v kiirus ning a

ja b konstandid 7.7 a) 2; b) 150 tuhat kr. 7.8 $p = \frac{450}{q}$. 7.9 <; >; <; =; <. 7.11 a) Jääkväärtus $J = 25\,000 \cdot 0,7^t$, kus t on arvuti

vanus aastas. b) 17 500 kr; 12 250 kr; 8575 kr. 7.12 286,72 kr. 7.13 238 031 kr. 7.14 $K = k \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$. 7.15 13 498,59 kr.

7.16 a) 19 670 kr; b) 20 020 kr; c) 20 100 kr; d) 20 140 kr. 7.17 16,19 kr. 7.18 neljakordseks 7.19 4493,29 kr 7.20 324 7.21 - 4,76% 7.22 $\approx 4\,475\,000$ elanikku. 7.23 ca 1,88 miljonit 7.24 a) 54,9%; b) 12,1% 7.25 37,5 ühikut 7.26 2; 3; 2; 1; 1; 2; 2; r ;

0; -1; -1. 7.27 10000; 95; 3. 7.28 1,39794; 3,90309; -0,30103; ei eksisteeri; 1,60944. 7.29 2,32193; 2,72683; -0,537243
 7.30 4a. 8,5 kuud; 4a. 6,3 kuud. 7.31 28,3a. 7.32 3 korda. 7.33 13a. 9k. 7.34 $N = 4,77 e^{0,01751t}$; 15 miljardit; 2158.a. 7.35
 $y = 100\,000 e^{0,4t}$; ca 223 000 kr; 1997 a. keskel. 7.36 $q = q_0 e^{-0,105t}$, 65%. 7.37 $y = y_0 e^{-0,16t}$; 10,6%. 7.38 $y(t) = 100 - 60 e^{-0,182t}$; 58 ostjat; 65 ostjat. 7.39 $N = 10000 e^{0,0296t}$; ca 18 000 elanikku.

8. MAATRIKSID

Maatriksi mõiste

NÄIDE 8.1. Maatriksesituse kasutamine

Firma töötajad on jagunenud allüksuste vahel järgmiselt:

	mehed	naised
administratsioon	2	5
müügiosakond	6	4
transpordiosakond	3	1

ladu	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">4</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> </tr> </table>	4	1
4	1		

NÄIDE 8.2. Maatriksesituse kasutamine turu analüüsil

Firmad *A* ja *B* kauplevad turul konkureerivate kaupadega. Firma *A* pakub kaupa A_1, A_2 ja A_3 , firma *B* kaupu B_1, B_2 ja B_3 . Firma *A* haarab kaubaga A_1 50% turust juhul, kui *B* müüb kaupa B_1 . Kui aga *B* müüb kaupa B_2 , saab firma *A* hõivata kaubaga A_1 60% turust. Kõikvõimalikud turusituatsioonid on kirjeldatavad alljärgneva tabeli abil:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,6	0,8
A_2	0,8	0,5	0,6
A_3	0,7	0,7	0,8

Maatriks on numbrite tabel, mis koosneb ridadest ja veergudest.

Maatriksi elementide tähistuses märgitakse elemendi asukoht maatriksis indeksitega. Esimene indeks näitab alati rea numbrit, teine indeks veeru numbrit:

- a_{23} — 2. rea ja 3. veeru element
- a_{ij} — i -nda rea j -nda veeru element

Näiteid maatriksitest:

$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \\ 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$(2 \ 7 \ 5 \ -9)$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$
2×2 maatriks	2×3 maatriks	3×3 maatriks	1×4 maatriks	4×1 maatriks

Maatrikseid tähistatakse enamasti suurte tähtedega ja nende elemente väikeste tähtedega: $A = (a_{ij})$.

Maatriksit, millel on m rida ja n veergu, nimetatakse $m \times n$ **dimensionaalseks** ehk $m \times n$ mõõtmeliseks maatriksiks. Sellise maatriksi üldkuju on:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Maatriksi dimensiooni märgitakse ka tähekombinatsiooniga *dim*. Näiteks, kui $dim A = 2 \times 3$, siis maatriksil *A* on 2 rida ja 3 veergu.

Kui ridade arv ja veergude arv on võrdsed, $m = n$, on tegemist **ruutmaatriksiga**. Näiteks järgmised maatriksid on ruutmaatriksid:

$$\begin{pmatrix} 23 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \\ 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ruutmaatrikseid, millel vaid peadiagonaalil on nullist erinevaid elemente ja kõik ülejäänud

elemendid on nullid, nimetatakse **diagonaalmaatriksiteks**. Diagonaalmaatriksid on näiteks järgmised maatriksid:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonaalmaatriksi korral $a_{ij}=0$, kui $i \neq j$.

Reavektor on maatriksi ühe rea elementidest moodustatud vektor. **Veeruvektor** on maatriksi ühe veeru elementidest moodustatud vektor.

Näiteks maatriksi $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

reavektorid on $(2 \ 7 \ 1)$ ja $(4 \ 5 \ 12)$ ning veeruvektorid on $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

ÜLESANDED

8.1 On antud maatriksi elemendid $a_{11} = 6$; $a_{21} = 4$; $a_{32} = 5$; $a_{13} = 3$; $a_{23} = 6$; $a_{12} = 10$; $a_{22} = 7$; $a_{31} = -5$; $a_{33} = 9$. Kirjutada välja vastav maatriks.

8.2 Firma AUVI tegeleb audio- ja videotehnika müügiga. Kuu algul oli firmal on kaupa kolmes laos järgmistes kogustes: laos A 10 telerit, 15 videomakki, 9 kassetmakki ja 12 stereokombaini; laos B 20 telerit, 14 videomakki, 8 kassetmakki ja 5 stereokombaini ning laos C 16 telerit, 8 videomakki, 15 kassetmakki ja 6 stereokombaini. Esitada kaubavarud maatrikskujul, kus read tähistaksid ladusid ja veerud kaupasad.

Maatriksite liitmine ja lahutamine

Liita (lahutada) saab ainult **samadimensionaalseid** maatrikseid, s.o. maatrikseid, millel ridade arv on võrdne ja veergude arv on võrdne. Teiste sõnadega, maatriksite A ja B summa $A + B$ ja vahe $A - B$ on leitavad ainult juhul, kui $\dim A = \dim B$.

Maatriksite liitmisel liidetakse (lahutatakse) ühel ja samal kohal olevad (samade indeksitega) maatriksite elemendid:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 8-1 & 9-3 & 7-6 \\ 3-5 & 6-2 & 2-4 \\ 4-7 & 5-9 & 10-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Omadusi

1. $A + B = B + A$ kommutatiivsus ehk vahetuvus.
2. $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ assotsiatiivsus ehk ühenduvus.
3. $A + (0) = (0) + A = A$, kus (0) on nullidest koosnev matriks, $\dim(0) = \dim A$.

ÜLESANDED

8.3 Leida järgmiste matriksite summa

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = (12 \ 16 \ 2 \ 7 \ 8) \quad B = (0 \ 1 \ 9 \ 5 \ 6)$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} x & 3y \\ 2x & -y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y & -y \\ 2x & x \end{pmatrix}$$

8.4 Leida järgmiste matriksite vahe:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ x & -y \\ 4y & -2x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & 3 \\ 3y & -x \end{pmatrix}$$

8.5 Firma AUVI, mille kaubavarud kuu algul olid esitatud ülesandes 8.2, tellis kaupa juurde. Tellimusmatriks oli järgmine

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Antud kuu müügi matriks (kui palju kaupa erinevatest ladudest välja müüdi) oli aga järgmine:

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 & 9 \\ 10 & 11 & 8 & 3 \\ 15 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Leida matriks, mis kirjeldab kaubavarusid kuu lõpul.

Maatriksi korrutamine skalaariga.

Skalaarseks suuruseks ehk **skalaariks** nimetatakse suurust, mis on täielikult kirjeldatud ühe arvuga. Skalaarid on näiteks 2; 15; -3; $2x$; $x + y$.

Maatriksi korrutamisel skalaariga korrutatakse selle skalaariga läbi kõik maatriksi elemendid: $kA = (ka_{ij})$.

Näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 27 \\ 6 & 21 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$$

Maatriksi A korrutamist skalaariga k tähistatakse kA .

Skalaariga korrutamisel maatriksi dimensioon ei muutu, $\dim A = \dim kA$

Skalaariga korrutamise omadusi:

1. $k(A+B) = kA + kB$.
2. $(k+l)A = kA + lA$.
3. $(kl)A = k(lA) = l(kA)$
4. $1 \cdot A = A$

ÜLESANDED

8.6 Leida korrutis kA , kui

$$\text{a) } k = 4, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } k = -2, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

8.7 Riietepoes müüakse kolme firma pintsakuid, pükse ja ülikondi. Hinnad on antud maatriksina, mille read vastavad toodetele ja veerud tootjafirmadele:

$$H = \begin{pmatrix} 1200 & 1400 & 1900 \\ 750 & 900 & 1100 \\ 1900 & 2200 & 3000 \end{pmatrix}$$

Seoses tühjendusmüügiga rakendatakse allahindust 20% kõigile kaupadele. Leida uus hinnamaatriks.

Maatriksi transponeerimine.

Transponeerimisel vahetavad maatriksi read ja veerud oma kohad:

1. rida \rightarrow 1. veerg
2. rida \rightarrow 2. veerg

Maatriksi A transponeerimisel saadud maatriksit nimetatakse **transponeeritud** maatriksiks ja tähistatakse A^T .

NÄIDE 8.3. Transponeeritud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Transponeerimisel matriksi dimensioon muutub. Näiteks 2×3 matriksist saadakse 3×2 matriks, 1×3 matriksist saadakse 3×1 matriks. Üldiselt, kui $\dim A = m \times n$, siis $\dim A^T = n \times m$.

$$B = (7 \ 4 \ 5) \quad B^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Transponeerimise omadusi:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(kA)^T = kA^T$
3. $(A^T)^T = A$

Matriksit, mis transponeerimisel ei muutu ($A^T = A$), nimetatakse **sümmeetriliseks matriksiks**. Sümmeetrilised matriksid on näiteks

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Sümmeetrilise matriksi korral $a_{ij} = a_{ji}$. Sümmeetriline saab olla vaid ruutmatriks.

ÜLESANDED

8.8 Leida transponeeritud matriksid:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 25 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \\ 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = (10 \ 2 \ 9 \ 6 \ 8 \ 1)$$

Matriksite korrutamine

Matriksite A ja B korrutamisel tuleb leida matriksi A reavektorite skalaarkorrutised matriksi B veervektoritega. Seepärast tutvume algul rea- ja veervektorite skalaarkorrutisega.

Kui on antud reavektor A ja veervektor B

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

siis nende **vektorite skalaarkorrutis** on

$$AB = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

Skalaarkorrutise leidmisel korrutatakse reavektori elemendid vastavate elementidega veervektorist ja saadud korrutised liidetakse.

Näiteks

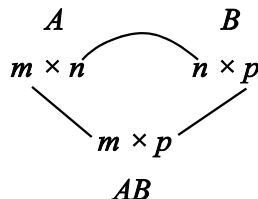
$$A = (4 \ 7 \ 2 \ 9) \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad AB = 4 \cdot 12 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 9 \cdot 6 = 48 + 7 + 10 + 54 = 119$$

Reavektori ja veeruvektori **skalaarkorrutise leidmine on võimalik** vaid siis, kui nende elementide arv on võrdne, s.o. I teguri veergude arv = II teguri ridade arv.

Maatriksite A ja B **korrutamise on võimalik**,

kui maatriksi A veergude arv = maatriksi B ridade arv.

Kui $\dim A = m \times n$ ja $\dim B = n \times p$, siis korrutise AB dimensioon on $\dim AB = m \times p$.



Olgu meil kaks maatriksit A ja B . Kui korrutamine on võimalik, siis nende **maatriksite korrutis** $AB = D$ on maatriks, mille elemendid leitakse maatriksi A reavektorite R_i ja maatriksi B veeruvektorite C_j skalaarkorrutistena: $d_{ij} = R_i C_j$.

Näiteks, kui maatriksi A dimensioon on 2×3 ja maatriksi B dimensioon 3×2 , siis nende korrutis AB on 2×2 maatriks:

$$AB = D = \begin{pmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 & R_1 C_3 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 & R_2 C_3 \end{pmatrix}$$

NÄIDE 8.4. Maatriksite korrutis

Olgu vaja leida maatriksite A ja B korrutis $AB = D$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Korrutise elementide leidmine:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ \boxed{3} & 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + 1 \cdot 3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 2 \cdot 8 + 4 \cdot 3 & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 28 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Nii jätkates leitakse kõik korrutismaatriksi elemendid.

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & \boxed{0} & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & \dots \\ 28 & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 & \dots \\ 28 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 & 26 \\ 28 & 8 & 54 \end{pmatrix}$$

Programmis *MS Excel* leiab maatriksite korrutise funktsioon **MMULT** (terminist *matrix multiplication*).

Olgu meil näiteks kaks ruutmaatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Leiame nende korrutised AB ja BA :

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 48 & 36 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 54 & 39 \end{pmatrix}.$$

Korrutised AB ja BA ei ole identsed.

Maatriksite korrutamine **ei ole kommutatiivne**, s.t. $AB \neq BA$.

Ühikmaatriks on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaali elemendid on ühed, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{ii} = \dots = 1$. Ühikmaatriksi tähistus on I . Mõnikord näidatakse ühikmaatriksi tähistuses ära ka ridade ja veergude arv (mis on võrdne) k ja mida nimetatakse **ühikmaatriksi järguks**: I_k . Näiteid ühikmaatriksitest:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ühikmaatriksiga korrutamisel maatriks ei muutu: $AI = IA = A$.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Seega ühikmaatriksil on maatriksite hulgas samasugune tähendus nagu arvul 1 skalaarsete suuruste hulgas.

ÜLESANDED

8.9 Leida rea- ja veeruvektori skalaarkorrutis:

a) $A = (9 \ 11 \ 3)$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $A = (12 \ -5 \ 6 \ 11)$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $A = (9 \ 6 \ 2 \ 0 \ -5)$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = (12 \ 9 \ 2 \ 4)$ $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.10 Leida korrutis AB

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 9 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = (2 \ 3 \ 5)$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

8.11 Leida korrutised AB ja BA :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Näiteid maatriksalgebra kasutamisest.

Maatriksalgebrat on otstarbekas kasutada paljudest andmetest koosnevate andmemassiivide ehk -tabelite töötlemisel. Kuna *MS Excelis* on vastavad funktsioonid olemas, lihtsustab see tunduvalt arvutusi.

NÄIDE 8.5. Tootmiseks vajalike komponentide arvu leidmine maatriksarvutuse abil

Firma toodab tooteid A ja B . Mõlemad tooted sisaldavad kolme komponenti 1, 2 ja 3, mis saadakse tarnijatelt. Toodete tootmismahud ja komponentide sisaldus on toodud alljärgnevates tabelites:

		Tooted				Komponentide sisaldus		
		A	B			1	2	3
Esmaspäev		0	1	Tooted		3	2	1
Teisipäev		2	2		A	1	4	2
Kolmapäev		3	2		B			
Neljapäev		1	1					
Reede		1	0					

Leida komponentide vajadus erinevatel nädalapäevadel.

Lahendus. Maatriksi, mis kirjeldab komponentide vajadust erinevatel nädalapäevadel, leiame tootmismahu maatriksi korrutamisel komponentide sisalduse maatriksiga:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 8 & 12 & 6 \\ 11 & 14 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vastus: Komponentide vajadus erinevatel nädalapäevadel on toodud järgnevas tabelis:

	Komponentide vajadus		
	1	2	3
Esmaspäev	1	4	2
Teisipäev	8	12	6
Kolmapäev	11	14	7
Neljapäev	4	6	3
Reede	3	2	1

NÄIDE 8.6. Maatriksalgebra kasutamine tootmise planeerimisel

Kolme toote A , B ja C tootmisel on vajalikud tööprotsessid F , G ja H erinevas järjestuses. Toote A tootmine vajab protsesse $HGHG$, toote B tootmine protsesse HFH ja toote C tootmine protsesse $FGHFGHF$. Konstrueerime maatriksi, mis kirjeldab, mitu korda iga toote tootmisel erinevaid protsesse vajatakse.

$$\begin{matrix} & F & G & H \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} & = & X \end{matrix}$$

Iga tööprotsess koosneb tavaliselt kolmest etapist: käivitamine K , töö T ja lõpetamine L . Protsessi H käivitusetapp ja protsessi G lõpetamine aega ei nõua. Protsessid F ja G nõuavad käivitamiseks (K) 10 minutit ning protsessi F tööetapp (T) kestab 1 tund ja lõpetamine (L) 10 minutit. Protsessi H lõpetamine kestab 20 minutit, protsessi G tööetapp 30 minutit ja protsessi H tööetapp 10 minutit. Esitame need andmed maatrikskujul

$$\begin{matrix} & K & T & L \\ \begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 & 60 & 10 \\ 10 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} & = & Y \end{matrix}$$

Maatriksite X ja Y korrutis annab meile maatriksi, milles on näha, kui palju iga toote korral kulub aega protsesside käivitamiseks, tööks ja lõpetamiseks:

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 60 & 10 \\ 10 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 40 \\ 10 & 80 & 50 \\ 50 & 260 & 70 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

Leides iga rea jaoks summa, saame teada, kui palju aega võtab iga toote valmistamine. Toote A peale kulub $20 + 80 + 40 = 140$ minutit, toote B peale 140 minutit ja toote C valmistamiseks 380 minutit.

NÄIDE 8.7. Koguse-, kulu-, hinna- ja tulumaatriksid.

Kohvikus on müügil kolme sorti pirukaid. Viineripirukaid, mille hind on 4 kr, müüakse päevas 350 tk, kapsapirukaid, mille hind on 3,50 kr, müüakse 200 tk ja lihapirukaid (hind 4,50 kr) müüakse 250 tk. Kulud ühele viineripirukale on 3,20 kr, kapsapirukale 3 kr ja lihapirukale 3,50 kr.

Leida kasum päevas.

Koguse, hinna ja kulumaatriksid on järgmised

$$q = \begin{pmatrix} 350 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 4 \\ 3,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 3 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

Kogutulu TR ja kogukulu TC leidmiseks korrutame transponeeritud kogusemaatriksi q^T vastavalt hinna- ja kulumaatriksiga:

$$TR = q^T \cdot p = (350 \ 200 \ 250) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 3225 \quad TC = q^T \cdot C = (350 \ 200 \ 250) \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 3 \\ 3,5 \end{pmatrix} = 2595$$

Kasum päevas on $P = TR - TC = 3225 - 2595 = 630$ krooni.

ÜLESANDED

8.12 Firma toodab tooteid A, B ja C. Tooted sisaldavad nelja komponenti 1, 2, 3 ja 4, mis saadakse tarnijatelt. Toodete toomismahud ja komponentide sisaldus on toodud alljärgnevates tabelites:

Leida komponentide vajadus kvartalite kaupa. Nõuanne: lahendus viia läbi MS Excelis, kasutades funktsiooni MMULT.

	Tooted				Komponentide sisaldus				
	A	B	C		1	2	3	4	
I kvartal	120	50	60	Tooted	A	2	2	1	4
II kvartal	70	110	50		B	0	2	1	4
III kvartal	20	40	45		C	3	1	3	0
IV kvartal	35	80	75						

8.13 Poes on müügil nelja tüüpi kiirõitjaid. Mudelit A, mille hind on 25 kr, müüakse päevas 150 tk, mudelit B, mille hind on 23,50 kr, müüakse 140 tk. Mudelite C ja D hinnad on samad (15,80 kr) ja müüakse neid vastavalt 80 tk ja 75 tk päevas. Kulud mudeli A kohta on 21,80 kr, mudeli B kohta 20,43 kr ja mudelite C ning D kohta 13,74 kr.

Leida kiirkõitjate müügist saadav kasum päevas. (Lahendus sooritada programmis MS Excel, kasutades maatriksalgebrat).

Oleku- ja üleminekumaatriksid

NÄIDE 8.8. Oleku- ja üleminekumaatriksid.

Teedeehitusfirma töö sõltub oluliselt sellest, kas on tegemist vihmase (V) või kuiva ilmaga (K) ja seepärast on töö planeerimisel vajalik kasutada ilma prognoosimist. Viimase 25 päeva jooksul vaheldus ilm järgmiselt:

KVKKK VVKKV KVVKK KVKKK KVKKK

See, milline ilm tuleb, sõltub suuresti eelmise päeva ilmast. Tähistades sündmusi "vihmasele ilmale järgneb vihmane" VV, "vihmasele järgneb kuiv" VK jne võime välja kirjutada vastavate sündmuste sagedused. VV esines 2 korda, VK esines 6 korda, KK 10 korda ja KV 6 korda. Need sagedused on otstarbekas esitada maatriksina:

$$\begin{matrix} & K & V \\ \begin{matrix} K \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Seda, kas ilm on kuiv või vihmane, nimetatakse ilma **olekuks**.

Kuivale ilmale järgnes kuiv 10 korral 16-st, järelkult tõenäosus, et kuivale ilmale järgneb kuiv, on $\frac{10}{16}$. Kuivale ilmale

järgnes vihmane 6 korral 16-st, vastav tõenäosus on siis $\frac{6}{16}$. Ühest olekust teise ülemineku tõenäosust nimetatakse

üleminekutõenäosuseks ja tähistatakse järgmiselt: $p(K \rightarrow K) = \frac{10}{16}$, $p(K \rightarrow V) = \frac{6}{16}$, $p(V \rightarrow K) = \frac{6}{16}$, $p(V \rightarrow V) = \frac{2}{8}$. Esitame

need tõenäosused maatrikskujul, nii et veerg näitab lähteolekut ja rida saavutatavat olekut

$$T = \begin{matrix} & K & V \\ \begin{matrix} K \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{10}{16} & \frac{6}{8} \\ \frac{6}{16} & \frac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,75 \\ 0,375 & 0,25 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Üleminekumaatriks (*transition matrix*) on maatriks, mille elementideks on ühest olekust teise ülemineku tõenäosused. Üleminekumaatriksi veeru elementide summa on alati 1.

Kui täna on ilm kuiv, siis vastav olekumaatriks on

$$\begin{matrix} K \\ V \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

See tähendab, et kuiva ilma tõenäosus on 1 ja vihmase ilma tõenäosus 0.

Tõenäosused homse ilma kohta (homse ilma olekumaatriksi) saame, kui korrutame üleminekumaatriksi olekumaatriksiga:

$$\begin{matrix} K \\ V \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,625 & 0,75 \\ 0,375 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

Saadud olekumaatriksi veeruelementide summa on 1, mis tähendab, et on kas kui või vihmane ilm, kolmandat võimalust pole.

Tõenäosuse ülehommse ilma kohta saame, kui korrutame üleminekumaatriksi homse ilma olekumaatriksiga

$$\begin{matrix} K \\ V \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,625 & 0,75 \\ 0,375 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,672 \\ 0,328 \end{pmatrix}$$

Nii võime saada olekumaatriksi suvalise järgneva ilma kohta, lähtudes tänase päeva ilmast.

NÄIDE 8.9. Turujaotuse muutumine

Toote turg on jaotatud kahe tootja A ja B vahel. Tootjale A kuulub momendil 60% turust ja tootjale B 40%.

Iga kuu toimub teatud ümberjagunemine. Nendest, kes ostsid eelmine kuu tootja A kaupa, 70% jääb sellele truuks, 30% aga valivad tootja B kauba. Nendest, kes eelmine kuu ostsid tootja B kaupa, jääb sellele truuks 80% , 20% aga valivad tootja A kauba.

Üleminekutõenäosused esitame maatrikskujul

$$\begin{matrix} & A & B \\ A & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Turujaotust iseloomustav olekumaatriks

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

Et saada turujaotust uuel kuul, korrutame üleminekumaatriksi olekumaatriksiga

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Nüüd jaguneb turg tootjate vahel võrdselt.

Järgmine kuu

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

Prognoosides turujaotust ette, tuleb üleminekumaatriks korrutada eelneva kuu olekumaatriksiga.

ÜLESANDED

8.14 Olgu täna vihmane ilm. Kasutades näites 8.8 toodud üleminekumaatriksit vihmase ja kuiva ilma vaheldumise kohta, leida millise tõenäosusega on homme vihmane ja millise tõenäosusega on ülehommse vihmane. (Kasutada programmi *MS Excel*)

Determinant

Determinant on ruutmatriksi elementide korrutistest spetsiaalse reegli järgi moodustatud summa.

Kasutatakse tähistust $\det A = |A|$.

Teist järku maatriksi determinant arvutatakse järgmise valemiga:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Näiteks

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 13$$

Kõrgemat järku maatriksitest determinantide leidmine on järk-järgult taandatav madalamat järku determinantide arvutamisele, s.t III järku determinandi saame II järku determinantide kaudu, IV järku determinandi saame III järku determinantide kaudu jne. Nii on suvalist järku determinandi leidmine taandatav II järku determinantide leidmisele.

Elemendi a_{ij} **miinor** M_{ij} on $(n - 1)$ järku determinant, mis saadakse determinandist $|a_{ij}|$ i -nda rea ja j -nda veeru kõrvaldamisel.

Seega elemendile a_{ij} vastava miinori saame, kui kõrvaldame rea ja veeru, mille ristumiskohas asub element a_{ij} . Näiteks III järku determinandi $|A|$ miinori M_{11} leidmiseks kõrvaldatakse 1. rida ja 1. veerg. Järele jäänud elementidest moodustatud determinant ongi miinor M_{11} :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Elemendile a_{12} vastava miinori M_{12} leidmiseks kõrvaldatakse 1. rida ja 2. veerg. Järele jäänud elementidest moodustatakse miinor M_{12} :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Neljandat järku determinandi korral näiteks

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Kasutades miinoreid, võib nüüd n järku determinandi arendada ritta kas rea või veeru järgi.

Determinandi arendus i -nda rea järgi:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

Näiteks III järku determinandi

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

arendus 1. rea järgi:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\ &= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \end{aligned}$$

Arvestades, et antud juhul on miinorid II järku determinandid,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

saame III järku determinandi jaoks

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

NÄIDE 8.10. III järku determinandi leidmine

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - (-3) \cdot (4 \cdot 6 - 7 \cdot 1) + 1 \cdot (4 \cdot 1 - 7 \cdot (-5)) = 28$$

Mõnikord on kasulik determinandi arvutamisel teha arendus veeru järgi.

Determinandi arendus j -nda veeru järgi (summeerimine toimub üle reaindeksite):

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$

NÄIDE 8.11. III järku determinandi leidmine

Järgmine III järku determinant on kasulik ritta arendada viimase veeru järgi:

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -12 & 11 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+3} 1 \cdot (-5 \cdot 3 - 4 \cdot 8) + 0 = -(-15 - 32) = 47$$

Programmis *MS Excel* leiab maatriksi determinandi funktsioon **MDETERM**.

Mõningaid **determinandi omadusi**.

1. $|A| = |A^T|$ transponeeritud maatriksi determinant võrdub lähtemaatriksi determinandiga.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 2 \quad |A^T| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 2$$

2. Kui omavahel vahetada kaks rida või kaks veergu, muutub determinandi märk vastupidiseks.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2$$

3. Kui leidub ainult nullidest koosnev rida või veerg, on determinant null.

$$\begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 2 & 15 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4. Kui rea või veeru elementidel on ühistegur, võib selle tuua kogu determinandi teguriks

$$\begin{vmatrix} 26 & -13 & 39 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ÜLESANDED

8.15 Leida järgmised determinandid

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \text{c)} \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 3x & 5 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} -x & 2x \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \text{e)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

8.16 Leida järgmised determinandid, võimalusel kasutada determinantide omadusi.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & -5 & 7 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

8.17 Kasutades funktsiooni MDETERM, leida programmis *MS Excel* järgmised determinandid

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 17 & 0,5 & 11 \\ -2 & 1,7 & 3 \\ 0,8 & 1 & 15 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 21 & 3 & 0,8 & 7 \\ 15 & -8 & 0,9 & 6 \\ 13 & 2 & 0,1 & 15 \\ -1 & 9 & 0,5 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Pöördmaatriks

Skalaarsete suuruste korral võib jagamist vaadelda kui pöördväärtusega korrutamist, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, kus

suuruse b pöördväärtus b^{-1} on defineeritud nii, et $bb^{-1} = 1$.

Maatriksite korral jagamisest ei räägita, räägitakse vaid pöördmaatriksiga korrutamisest.

Ruutmaatriksi A **pöördmaatriks** A^{-1} on maatriks, millega antud maatriksit A korrutades saame ühikmaatriksi:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Olgu meil antud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Leiame selle maatriksi pöördmaatriksi $A^{-1} = (b_{ij})$. Selleks kasutame tingimust, et $AA^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6b_{11} + 7b_{21} & 6b_{12} + 7b_{22} \\ 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Saame nelja tundmatuga neljast võrrandist koosneva lineaarvõrrandsüsteemi

$$\begin{cases} 6b_{11} + 7b_{21} = 1 \\ 6b_{12} + 7b_{22} = 0 \\ 2b_{11} + 3b_{21} = 0 \\ 2b_{12} + 3b_{22} = 1 \end{cases}$$

Võrrandsüsteemi lahendamiseks leiame matriksi A determinandi $|A| = 4$. Pöördmatriksiks saame

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & -1,75 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Kontrollime saadud tulemust:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & -1,75 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Leitud matriks on tõesti matriksi A pöördmatriks.

Pöördmatriksi leidmiseks suvalisest matriksist võtame kasutusele adjungeeritud matriksi.

Adjungeeritud matriks on matriksi $A = (a_{ij})$ elementide alamdeterminantidest A_{ij} koostatud ja seejärel transponeeritud matriks:

$$\text{adj}A = (A_{ij})^T = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriksi A **pöördmatriksi leidmiseks** tuleb adjungeeritud matriks jagada matriksi A determinandiga:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|}$$

Näiteks 2×2 matriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{pöördmatriks} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}$$

MS Excelis leiab pöördmatriksi funktsioon **MINVERSE**.

ÜLESANDED

8.18 Leida järgmiste 2×2 matriksite pöördmatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vastuste kontrollimiseks kasuta seost $AA^{-1} = I$.

Lineaarvõrrandsüsteemi lahendamine matriksvõrrandi abil.

Matriksite kasutamine lihtsustab lineaarvõrrandsüsteemide lahendamist. Olgu meil näiteks kolmest võrrandist koosnev lineaarne võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Moodustame kolm maatriksit: kordajatest 3×3 maatriks, tundmatutest ja vabaliikmetest 3×1 maatriksid:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nüüd võime võrrandsüsteemi kirja panna maatriksite korrutisena $AX = B$.

Üldjuhul: n tundmatut sisaldava ja n võrrandist koosneva lineaarvõrrandsüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

maatrikskuju on

$$AX = B$$

kus maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Võrrandsüsteemi lahendamiseks tuleb meil lahendada maatriksvõrrand, s.t. tuleb leida maatriks X . Maatriksvõrrandi lahendamiseks korrutame võrrandi mõlemaid pooli vasakult poolt maatriksi A pöördmaatriksiga

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Maatriksvõrrandi	$AX = B$
lahendiks on maatriks	$X = A^{-1}B$

ÜLESANDED

8.19 On läbiviidud kahe asenduskauba turuanalüüs. Olgu esimese kauba hind p_1 ja teise kauba hind p_2 . Vastavad pakkumisfunktsioonid on $S_1 = -60 + 10p_1$ ja $S_2 = -68 + 20p_2$ ning nõudlusfunktsioonid $D_1 = 27 - 8p_1 + p_2$ ja $D_2 = 30 - 16p_2 + 2p_1$. Leida hinnad, mille korral mõlema kauba turud on tasakaalus.

8.20 Uurime 3 asenduskauba turgu:

- 1. kauba nõudlus $D_1 = 23 - 5p_1 + p_2 + p_3$; pakkumine $S_1 = -8 + 6p_1$
- 2. kauba nõudlus $D_2 = 15 + p_1 - 3p_2 + 2p_3$; pakkumine $S_2 = -11 + 3p_2$
- 3. kauba nõudlus $D_3 = 19 + p_1 + 2p_2 - 4p_3$; pakkumine $S_3 = -5 + 3p_3$

Leida hinnad, mille korral kõik 3 turgu on tasakaalus.

8.21 Ressursside A, B ja C kogused on vastavalt 130; 85 ja 60. Leida toodete X, Y ja Z kogused, et kõik ressursid oleksid jäägitult kasutatud, kui toodete X, Y ja Z ressursivajadused on toodud järgnevas tabelis:

Toode	Ressurss		
	A	B	C
X	3	3	1
Y	3	2	3
Z	2	0	1

ÜLESANNETE VASTUSED

8.1 $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ -5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 8.2 $\begin{pmatrix} 10 & 15 & 9 & 12 \\ 20 & 14 & 8 & 5 \\ 16 & 8 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

8.3 a) $\begin{pmatrix} 21 & 13 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ c) (12 17 11 12 14) d) $\begin{pmatrix} x+y & 2y \\ 4x & x-y \end{pmatrix}$

8.4 a) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 10 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 3y-x \\ -x & -y-3 \\ y & -x \end{pmatrix}$ 8.5 $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

8.6 a) $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 36 & 20 \\ 24 & 28 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -14 & 6 & -4 \\ 10 & -12 & -16 \\ -4 & 14 & 18 \end{pmatrix}$ 8.7 $\begin{pmatrix} 960 & 1120 & 1520 \\ 600 & 720 & 880 \\ 1520 & 1760 & 2400 \end{pmatrix}$

8.8 $A^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $C^T = (12 \ 19 \ 25)$ $D^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $E^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.9 a) $AB = 105$; b) $AB = 44$; c) $AB = 101$; d) pole võimalik.

8.10 a) $AB = \begin{pmatrix} 78 & 20 \\ 60 & 16 \\ 61 & 17 \end{pmatrix}$; b) $AB = \begin{pmatrix} 117 & 94 & 46 \\ 51 & 62 & 19 \\ 138 & 76 & 56 \end{pmatrix}$; c) $AB = (74 \ 18 \ 59)$; d) $AB = \begin{pmatrix} 64 \\ 91 \\ 41 \end{pmatrix}$.

8.11 a) $AB = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 40 & 9 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$; b) $AB = \begin{pmatrix} 28 & 24 & 16 \\ 29 & 37 & 18 \end{pmatrix}$, BA leidmine pole võimalik.

8.12 Komponentide vajadus kvartalite kaupoon toodud järgmises tabelis:

	Komponendid			
	1	2	3	4
I kv	420	400	350	680
II kv	290	410	330	720
III kv	175	165	195	240
IV kv	295	305	340	460

8.13 1229,10 kr. **8.14** Homme on vihmase ilma tõenäosus 0,25, ülehomme 0,344. **8.15** a) -12; b) 19; c) $-2x$; d) $-11x$; e) -7; f) -68. **8.16** a) 0; b) 1; c) 3; d) 8. **8.17** a) 361,74; b) 2250,3. **8.19** $p_1 = 5, p_2 = 3$ ühikut. **8.20** $p_1 = 4$ kr; $p_2 = 7$ kr ja $p_3 = 6$ kr. **8.21** X 25 tk, Y 5 tk ja Z 20 tk.

KASUTATUD KIRJANDUS

1. Luigelaht, V., Reiman, E. Koolimatemaatika põhikursus. 1. ja 2. osa. 3. trükk. Tln, Valgus, 1993.
2. Levin, A., Tõnso, T., Veelmaa, A. Matemaatika XI klassile. Tln, "Mathema", 1995.
3. Telgmaa, A. Rahandusküsimusi koolimatemaatikas. Tln, AVITA, 1994.
4. Kummer, J. Funktsioonid ja nende tuletised majandusarvestustes. Tln. "Avita", 1996.
5. Paas, T. Kvantitatiivsed meetodid majanduses (majandusmatemaatika).
6. Sikk, J. Majandusmatemaatika ülesannete kogu. Tartu, 1996.
7. Dowling, E.T. Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economics. 2/ed. McGraw-Hill, 1992.
8. Hoffmann, L.D., Bradley, G.L. Calculus for Business, Economics and the Social and Life Sciences. 5/ed. McGraw-Hill, 1992.
9. Stancl, D.L., Stancl, M. L. Brief Calculus for Management and the Life and Social Sciences. USA, Irwin, 1990.
10. Haeussler, E. F., Paul, R., S. Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences. USA, Prentice-Hall, 1999.