Statsionaarsed aegread

Teemad

- Viitajad ja aegridade diferentsimine
- Juhuslikud protsessid ja nende karakteristikud
- Range ja nõrk statsionaarsus
- Autokorrelatsioon ja selle testimine
- ARIMA mudelid
- Box-Jenkinsi metoodika
- Prognoosimine ja prognooside hindamine

Aegridade analüüs.

- Ei ole seletavaid tunnuseid, st ei uurita muutuste põhjuseid.
  - analüüs põhineb majandusprotsesside inertsusel
- Ühemõõtmeline modelleerimine (*univariate modelling*): meil on ainult ühe tunnuse muutus ajas.
  - VAR mudelite korral ka mitmemõõtmeline modelleerimine
- Eesmärgid:
  - Lühiajaline prognoosimine (ARIMA mudelid, veaparandusmudelid ECM)
  - Statsionaarsuse määramine, trendi kindlakstegemine (ühikjuure testid)
  - Pikaajaliste seoste leidmine (kointegratsioon)

Põhilised teisendused

- Viitaegade leidmine
- Diferentsimine
  - 1. ja kõrgemat järku diferentsid
  - sesoonsed diferentsid
- Logaritmimine (naturaallogaritm)
- Diferentsid logaritmidest
- Eesmärgiks on trendi ja sesoonsuse eemaldamine

Viitaeg ja diferentsid

- Aegrea y_t esimest järku **viitajaks** (*lag*) nimetatakse aegrida y_{t-1}
- k-ndat järku viitaeg on aegrida y_{t-k}
- Aegrea esimest järku **diferents** on aegrea järjestikuste liikmete vahe

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

- Aegrea **teist järku diferents** on aegrea järjestikuste esimest järku diferentside vahe

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

- ***k*-ndat** järku diferents on järjestikuste k-1 järku diferentside vahe

$$\Delta^k y_t = \Delta^{k-1} y_t - \Delta^{k-1} y_{t-1}.$$

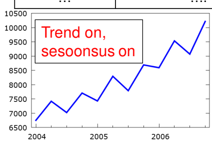
- **Sesoonseks diferentsiks** nimetatakse aegrea aastast muutu.

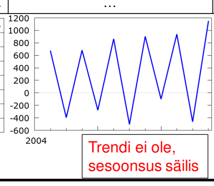
Kvartaalsete andmete korral $\Delta_4 y_t = y_t - y_{t-4}$

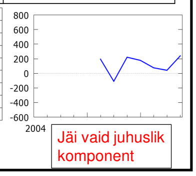
Kuiste andmete korral $\Delta_{12} y_t = y_t - y_{t-12}$

Näide: keskmine brutopalk Eestis

Aasta, kvartal	Brutopalk, kr	1. järku diferents	Sesoonne diferents 1. järku diferentsidest
2004: 1	6748		
2004: 2	7417	669=7417-6748	
2004: 3	7021	-396=7021-7417	
2004: 4	7704	683	
2005:1	7427	-277	
2005: 2	8291	864	195=864-669
2005: 3	7786	-505	-1369
…	….	…	…



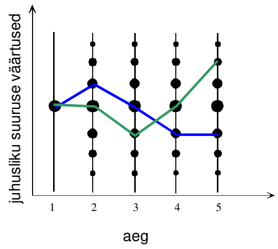




JUHUSLIKUD PROTSESSID JA STATSIONAARSUS

Stohhastiline ehk juhuslik protsess

Juhuslik suurus *Y* võib erinevatel ajamomentidel omada erineva tõenäosusega erinevaid väärtusi.

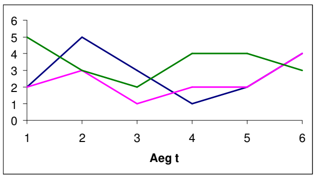


- Võimalikud olekud (väärtused) konkreetsel ajamomendil. Punkti suurus näitab oleku tõenäosust.

Võimalike olekute järjestus annab trajektoori ehk juhusliku protsessi mingi kindla realisatsiooni

Stohhastiline - juhuslik, tõenäone
Kreeka k. *stokhos* sihtmärk, *stokhastikos* õigesti oletatav

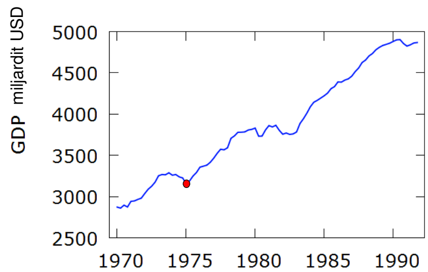
Juhusliku protsessi erinevad realisatsioonid



Läbilõikeandmed	Aegread
Kogum	Genereeriv protsess
Valim	Realisatsioon

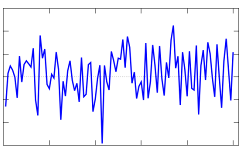
Uurida saame vaid juhusliku protsessi üht konkreetset realisatsiooni. Selle põhjal peame tegema järeldusi genereeriva protsessi kohta.

Näide: USA SKP 1970-1991



1975. a I kv väärtus võib olla suvaline arv, mis sõltub paljudest valitsevatest majanduslikest ja poliitilistest tingimustest.
3154,1 mlrd USD on nende kõikvõimalike väärtuste üks konkreetne realisatsioon.

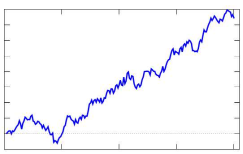
Olulisemad juhuslikud protsessid



Valge müra (*white noise*) u_t

$$Cov(u_t, u_{t-i}) = 0$$

Igal ajahetkel "starditakse" ühest ja samast kohast. "Ei mäleta", kuhu jõudis eelmisel ajahetkel. Mäluta protsess.

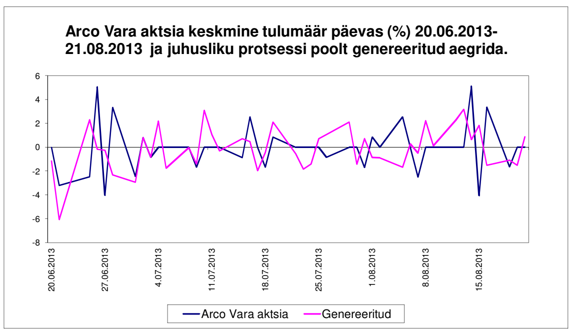


Juhuslik ekslemine (*random walk*)

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$

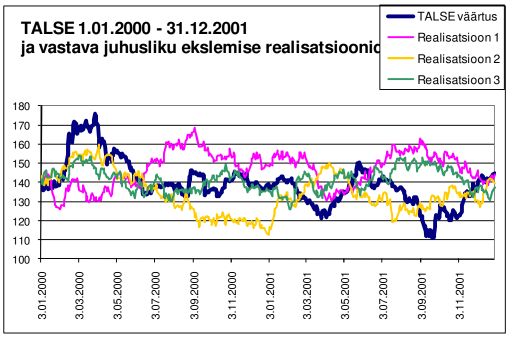
Igal järgmisel ajahetkel "starditakse" sealt, kuhu jõuti eelmisel ajahetkel. "Mäletatakse" eelmist positsiooni. Mäluga protsess.

Näide: valge müra aktsiaturgudel



Aritmeetiline keskmine -0,07%, standardhälve 1,96%

Näide: juhuslik ekslemine aktsiaturgudel



Juhusliku protsessi karakteristikud

keskväärtus	$E[y_t] = \mu_t$
dispersioon	$Var(y_t) = E\left[(y_t - \mu)^2\right] = \sigma^2(y_t)$
autokovariatsioon	$Cov(y_t, y_{t-i}) = E\left[(y_t - \mu)(y_{t-i} - \mu)\right] = \gamma(y_t, y_{t-i})$

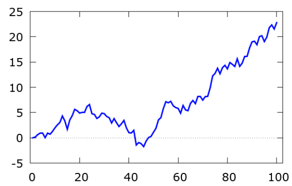
Keskväärtus iseloomustab keskmist taset.
Dispersioon iseloomustab hajumist.
Kovariatsioon iseloomustab juhusliku suuruse erinevate väärtuste vahelist statistilist seost.

Autokovariatsioon:
aegrea korral on erinevateks väärtusteks erinevatele ajaperioodidele (või momentidele) vastavad väärtused y_t ja y_{t-i}

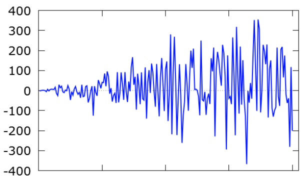
Kui $Cov(y_t, y_{t-i}) = 0$ siis y_t ja y_{t-i} sõltumatud.

Demo: karakteristikud

Karakteristikud üldiselt muutuvad ajas



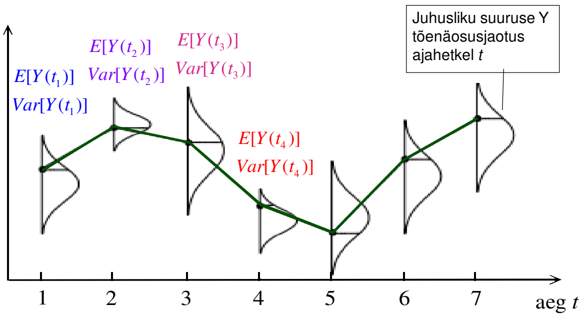
Keskväärtus muutub



Keskväärtus on konstantne, dispersioon muutub

Mittestatsionaarne protsess

Üldiselt on igal ajamomendil erinev tõenäosusjaotus



Ansambli ja aegrea keskväärtus

Realisatsioon 1	$x_1(t_1)$,	$x_2(t_2)$,	…,	$x_1(T)$
	⋮	⋮		⋮
Realisatsioon m	$x_m(t_1)$,	$x_m(t_2)$,	…,	$x_m(T)$
	⋮	⋮		⋮
Realisatsioon M	$x_M(t_1)$,	$x_M(t_2)$,	…,	$x_M(t_1)$

$$E[X(t_i)] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_m(t_i)$$

Ansambli keskväärtus on üle erinevate realisatsioonide. Ei ole vaadeldav

Realisatsioon 1	$x_1(t_1)$,	$x_2(t_2)$,	…,	$x_1(T)$
	⋮	⋮		⋮
Realisatsioon m	$x_m(t_1)$,	$x_m(t_2)$,	…,	$x_m(T)$
	⋮	⋮		⋮
Realisatsioon M	$x_M(t_1)$,	$x_M(t_2)$,	…,	$x_M(t_1)$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_m(t)$$

Aegrea keskväärtus **on vaadeldav**

Range statsionaarsus.

Juhuslik protsess on rangelt statsionaarne (*strongly stationary*), kui vastava juhusliku suuruse tõenäosusjaotus ajas ei muutu.

Ka statsionaarsus kitsamas mõttes.

- Modelleerimiseks ja prognoosimiseks on vajalik statsionaarsus.
- Ranget statsionaarsust on praktikas võimatu kontrollida

Nõrk statsionaarsus

Juhuslik protsess on nõrgalt statsionaarne (*weakly stationary*), kui tema tõenäosuslikud omadused ei muutu ajas (on ajas invariantsed):

konstantne keskväärtus $E(y_t) = E(y_{t+m}) = \mu < \infty,$

konstantne dispersioon $\sigma^2(y_t) = \sigma^2(y_{t+m}) = \sigma^2 < \infty,$

konstantne autokovariatsioon $\gamma(y_t, y_{t-j}) = \gamma(y_{t+m}, y_{t+m-j}) = \gamma_j$

Kovariatsioon sõltub vaid ajamomentide vahest j

Ka
- statsionaarsus laiemas mõttes (*stationarity in wide sense*)
- kovariantne statsionaarsus (*covariance stationarity*)

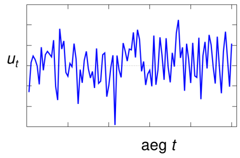
Edaspidi mõeldakse statsionaarsuse all nõrka statsionaarsust

Valge müra

Valge müra korral igale ajahetkele t vastavad juhuslikud suurused u_t on

1. üksteisest sõltumatud: $Cov(u_t,u_{t-j})=0$ iga t ja $j\neq0$ korral
2. konstantse keskväärtusega $E(u_t) = \mu$;
3. konstantse dispersiooniga: $Var(u_t) = \sigma^2$

Valge müra on **statsionaarne** protsess.
Aga statsionaarseid protsesse on teisigi.



Valge müra tähtsaim omadus: autokovariatsiooni puudumine ehk sõltumatus.

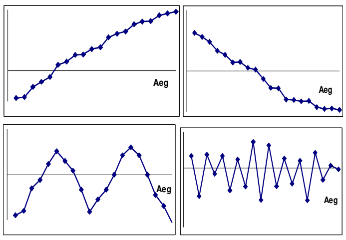
See eristab seda teistest protsessidest.

AUTOKORRELATSIOON JA SELLE TESTIMINE

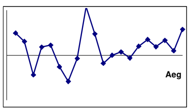
Autokorrelatsioon

Üheks oluliseks aegrea omaduseks on perioodil t esineva aegrea väärtuse sõltuvus varasemate perioodide väärtustest.

Seda sõltuvust nimetatakse autokorrelatsiooniks.



Autokorrelatsioon puudub



Kuidas hinnata autokorrelatsiooni tugevust või selle puudumist?
Vaja kvantitatiivset näitajat!

Autokorrelatsioonikordaja

Autokorrelatsiooni mõõdab **autokorrelatsioonikordaja** (AC)

Kui meil on antud aegrida y_t , t=1,2,...,n, siis saame moodustada n-1 arvupaari (y_1, y_2), (y_2, y_3), ..., (y_{t-1}, y_t).

y_1	y_2
y_2	y_3
...	....
y_{t-1}	y_t

Autokorrelatsioonikordaja näitajate y_t ja y_{t-1} vahel:

Märkus: See on ligikaudne valem, kehtib pikkade aegridade korral (n>50)

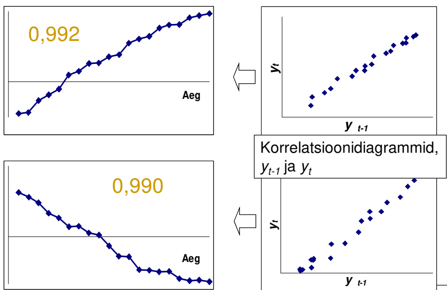
$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1}-\bar{y})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2}$$

kus keskväärtus

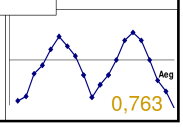
$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$$

$$-1 \le \rho \le 1$$

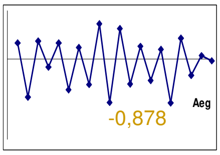
Millal on autokorrelatsioon positiivne

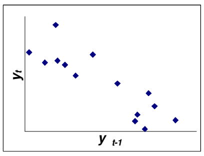


Autokorrelatsioonikordaja on **positiivne**, kui
- kasvamisele järgneb kasvamine
- kahanemisele järgneb kahanemine



Millal on autokorrelatsioon negatiivne

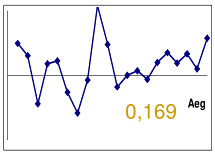


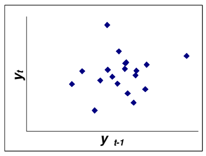


Korrelatsioonidiagramm, y_{t-1} ja y_t

Autokorrelatsioonikordaja on **negatiivne**, kui
- kasvamisele järgneb kahanemine
- kahanemisele järgneb kasvamine

Millal autokorrelatsioon puudub





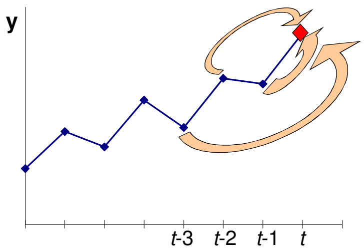
Korrelatsioonidiagramm, y_{t-1} ja y_t

Autokorrelatsioon **puudub** kui
- kasvamisele järgneb
  - mõnikord kahanemine
  - mõnikord kasvamine
- kahanemisele järgneb
  - mõnikord kahanemine
  - mõnikord kasvamine

Kui väike peaks olema autokorrelatsioonikordaja absoluutväärtus, et võiksime öelda: “autokorrelatsioon puudub”?
Vaja kriteeriumi!

Autokorrelatsioon ja kõrgemat järku viitajad

Ajamomendile *t* vastav aegrea väärtus y_t võib sõltuda mitte ainult eelmisele ajamomendile *t*-1 vastavast väärtusest y_{t-1}, vaid ka varasematest väärtustest y_{t-2}, y_{t-3}, ..., y_{t-k},



Vastavalt
1. järku autokorrelatsioon
2. järku autokorrelatsioon
3. järku autokorrelatsioon
....
k-ndat järku autokorrelatsioon

Autokorrelatsioonifuktsioon ACF

1. järku autokorrelatsioonikordaja mõõdab vahetult järgnevate vaatluste vahelist korrelatsiooni

$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1}-\bar{y})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2},$$

k-ndat järku autokorrelatsioonikordaja mõõdab vaatluste y_{t-k} ja y_t vahelist korrelatsiooni

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_{t-k}-\bar{y})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2}$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_k \rightarrow \rho(k)$

Autokorrelatsioonifunktsioon (ACF) on autokorrelatsiooni-kordaja sõltuvus viitajast *k*.

Näide: keskmise palga autokorrelatsiooni funktsioon

Aasta, kvartal	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}
2004, 1	6748				
2004, 2	7417	6748			
2004, 3	7021	7417	6748		
2004, 4	7704	7021	7417	6748	
2005, 1	7427	7704	7021	7417	6748
2005, 2	8291	7427	7704	7021	7417
2005, 3	7786	8291	7427	7704	7021
2005, 4	8690	7786	8291	7427	7704
2006, 1	8591	8690	7786	8291	7427
2006, 2	9531	8591	8690	7786	8291
2006, 3	9068	9531	8591	8690	7786
2006, 4	10212	9068	9531	8591	8690

Autokorrelatsiooni-kordajad

1. järku	0,524
2. järku	0,566
3. järku	0,144
4. järku	0,144

Autokorrelatsiooni statistilise olulisuse testimine

- Nullhüpotees: kõik autokorrelatsioonikordajad kuni viitajani *k* on nullid,
  - st autokorrelatsioon puudub;
  - st genereerivaks protsessiks on valge müra.
- Sisukas hüpotees: esineb autokorrelatsioon
- Testimiseks kasutatavad statistikud
  - Q statistik (ka Portmanteau statistik, Box-Pierce statistik)
  - Box-Ljungi statistik. Sobivam väikeste valimite korral.
- Mõlemad alluvad suurte valimite korral χ^2 jaotusele. Vabadusastmete arv = viitaegade arv.
- Kui statistiku väärtus on suurem, kui χ^2 kriitiline väärtus (olulisuse tõenäosus on väiksem kui valitud olulisuse nivoo), võtta vastu sisukas hüpotees, autokorrelatsioon esineb.

Box-Ljungi statistik

Box-Ljungi statistik $Q_{BL} = n(n+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{\rho_j^2}{n-j} \quad \sim \chi^2(k)$

Autorid Box ja Ljung (1978)

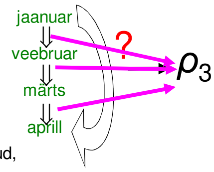
n – aegrea pikkus, st aegrea väärtuste arv
k – mitmenda viitajani autokorrelatsiooni uuritakse
ρ_j – j-järku autokorrelatsioonikordaja

- Mitmenda viitajani ehk kui suur võtta k väärtus?
- Ühest kriteeriumi ei ole.
- Leitakse statistiku väärtused **erinevate** viitaegade arvu k korral. Vaadatakse näiteks, millal autokorrelatsioon muutub statistiliselt mitteoluliseks.

Osaline autokorrelatsioon PACF

partial autocorrelation

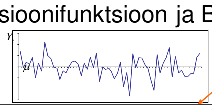
- Uurime näiteks, kuidas jaanuarikuu väärtus mõjutab aprillikuu väärtust. St viitaeg on 3.
- Selleks leiame vastava autokorrelatsioonikordaja ρ_3 .
- Aga: jaanuarikuu väärtus mõjutab ka veebruarikuu väärtust, see omakorda märtsikuu oma, mis omakorda aprilli väärtust.
- ρ_3 väärtust mõjutavad ka vahepealsed mõjud, need tuleks elimineerida



- Statistikas on olemas mõiste “osakorrelatsioonikordaja”, mis mõõdab suuruste x ja y vahelise seose tugevust tingimusel, et näitajate z_1, z_2, ..., z_m mõju on eemaldatud.

Osaline autokorrelatsioon mõõdab autokorrelatsiooni y_{t-k} ja y_t vahel, kusjuures vahepealsete väärtuste mõju on elimineeritud.

Näide: valge müra autokorrelatsioonifunktsioon ja Box-Ljungi statistik



$Q_{BL} = n(n+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{\rho_j^2}{n-j}$

Variable->Correlogram

LAG	ACF	PACF	Q-stat.	[p-value]
1	-0,0481	-0,0481	0,1227	[0,726]
2	0,0977	0,0956	0,6397	[0,726]
3	0,0049	0,0139	0,6411	[0,887]
4	0,1504	0,1436	1,9204	[0,750]
5	0,1139	0,1296	2,6703	[0,751]
6	-0,0995	-0,1182	3,2552	[0,776]
7	0,0188	-0,0185	3,2765	[0,858]
8	-0,0614	-0,0702	3,5100	[0,898]
9	-0,1330	-0,1870	4,6309	[0,865]
10	0,0432	0,0624	4,7521	[0,907]

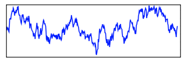
olulisuse tõenäosus

Autokorrelatsiooni-funktsioon

Osalise auto-korrelatsiooni-funktsioon

H_0, autokorrelatsioon puudub. Aegrida on genereeritud valge müra poolt.

Näide: juhusliku ekslemise autokorrelatsioonifunktsioon ja Box-Ljungi statistik

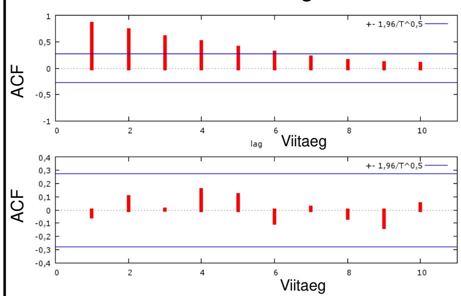


LAG	ACF		PACF		Q-stat.	[p-value]
1	0,8420	***	0,8420	***	37,6144	[0,000]
2	0,7249	***	0,0551		66,0808	[0,000]
3	0,5933	***	-0,1028		85,5528	[0,000]
4	0,4951	***	0,0244		99,4051	[0,000]
5	0,3990	***	-0,0348		108,6034	[0,000]
6	0,3026	**	-0,0743		114,0138	[0,000]
7	0,2034		-0,0777		116,5151	[0,000]
8	0,1448		0,0630		117,8136	[0,000]
9	0,1017		0,0234		118,4701	[0,000]
10	0,0855		0,0449		118,9455	[0,000]

olulisuse tõenäosus

H_1: esineb autokorrelatsioon

Korrelogrammid



Juhuslik ekslemine
ACF nullist erinev, väheneb aeglaselt viitaegade kasvamisel

Valge müra:
ACF väärtused on vea piirides nullid

- Korrelogrammil esitatakse autokorrelatsioonifunktsioon visuaalselt
- Võimaldab esile tuua tunnuse ajalise käitumise iseloomu, mida on raske kindlaks teha aegrea enda vaatlemisel.

ARIMA MUDELID

ARMA modelleerimise eesmärk

Aegrea autokorrelatsiooni struktuur püütakse esitada ARIMA mudeli abil.

See, mis ARIMA mudelist üle jääb, on valge müra.

Põhiliseks kasutusvaldkonnaks on **lühiajaline prognoosimine**:

- makroökonoomika aegread
- finantsaegread
- ettevõtluses nõudlus

Võetud üle elektriinseneride poolt kasutatud signaalide filtreerimisest, mis töötati välja 1930-ndatel.
Laiemalt võeti kasutusele pärast G.E.P.Box ja G. Jenkins'i raamatu Time Series Analysis: Forecasting and Control ilmumist 1971. a.

Libiseva keskmise mudelid MA

Valge müra üldistus: juhuslike liikmete ehk šokkide u_t kaalutud libisev keskmine (*moving average*, MA)

MA(q)

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \ldots + \theta_q u_{t-q}$$ u_{t-i} on valge müra

$$y_t = \mu + u_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i}$$

"Mäletab" eelmisi šokke u_{t-i}

$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$ MA(1), 1. järku libisev keskmine

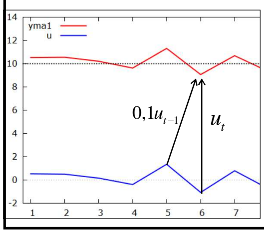
$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$ MA(2), 2. järku libisev keskmine

MA liikmete interpretatsioon I

MA kordajad iseloomustavad juhuslike šokkide mõju järgnevatele aegrea liikmetele.

$y_t = \mu + u_t + 0{,}1 u_{t-1}$

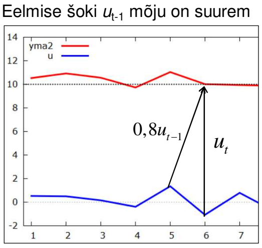
Eelmise šoki u_{t-1} mõju on väiksem



šokid u_t

$y_t = \mu + u_t + 0{,}8 u_{t-1}$

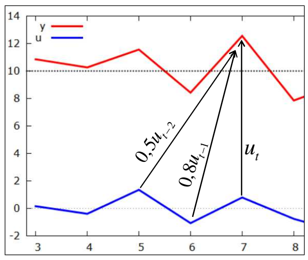
Eelmise šoki u_{t-1} mõju on suurem



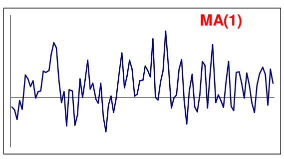
MA liikmete interpretatsioon, II

$$y_t = \mu + u_t + 0{,}8 u_{t-1} + 0{,}5 u_{t-2}$$

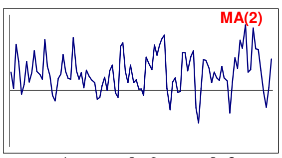
Mõju avaldavad nii eelmine šokk u_{t-1} kui ka üle-eelmine šokk u_{t-2}



Näide: libiseva keskmise mudelid MA



$y_t = 1 + u_t + 0{,}6 u_{t-1}$



$y_t = 1 + u_t + 0{,}6 u_{t-1} + 0{,}3 u_{t-2}$

MA(q) protsessi karakteristikud

$$y_t = \mu + u_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i}$$

Keskväärtus $E(y_t) = \mu$ Konstantne

Dispersioon $\sigma^2(y_t) = \sigma^2(u_t)\left(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2\right)$ $\sigma^2(u_t)$ konstantne, järelikult $\sigma^2(y_t)$ konstantne

Kovariatsioon $\operatorname{cov}(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 + \sum_{i=k+1}^{q} \theta_i \theta_{i-k}\right), & k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}$ Konstantne

MA(q) protsess on statsionaarne

Autoregressiivsed mudelid AR

Autoregressiivne mudel: aegrea liikmed sõltuvad eelnevatest liikmetest (viitaegadest)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

AR(p) $\quad y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + u_t \qquad u_t$ on valge müra

"Mäletab" eelmisi väärtusi y_{t-i}

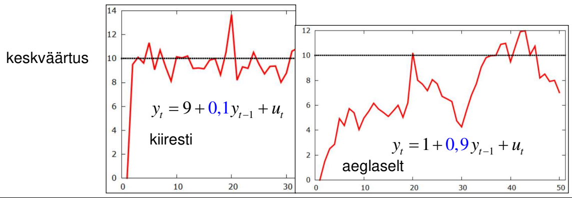
$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$ 1. järku autoregressiivne mudel AR(1)

$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$

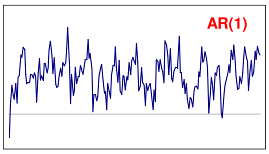
2. järku autoregressiivne mudel AR(2)

AR liikmete interpretatsioon

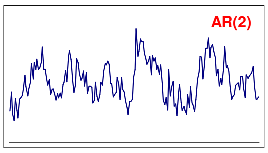
- Autoregressiivsus tähendab, et esineb nö "taastav jõud", mis sunnib aegrida pöörduma tagasi keskväärtuse poole (*mean reversion*).
- Keskväärtusele lähenemise kiiruse määrab AR kordajate summa. Kui kordajate summa on
  - väike, toimub tagasipöördumine kiiresti;
  - suur, toimub tagasipöördumine aeglasemalt.



Näited: autoregressiivsed mudelid



$y_t = 1 + 0,6 y_{t-1} + u_t$



$y_t = 1 + 0,6 y_{t-1} + 0,3 y_{t-2} + u_t$

AR(p) protsessi keskväärtus

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Keskväärtus $\boxed{E(y_t) = \dfrac{c}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} = \mu}$

Kui nimetaja $1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 0$, siis keskväärtus pole defineeritud

Sellisel juhul ühikjuure protsess, mittestatsionaarne

Millal on AR protsess statsionaarne?

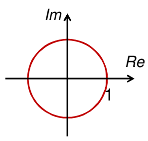
AR(p) protsessi statsionaarsuse tingimus

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Karakteristlik võrrand $\quad 1 - \phi_1 \lambda - \phi_2 \lambda^2 - \ldots - \phi_p \lambda^p = 0$

Karakteristliku võrrandi juured (lahendid) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (üldiselt kompleksed)

AR(p) protsess on statsionaarne, kui kõik karakteristlikud juured asuvad väljaspool ühikringi.



Ühikring komplekstasandil

Vt õpik Brooks lk 217 näide 5.3

AR(1) protsessi statsionaarsuse tingimus

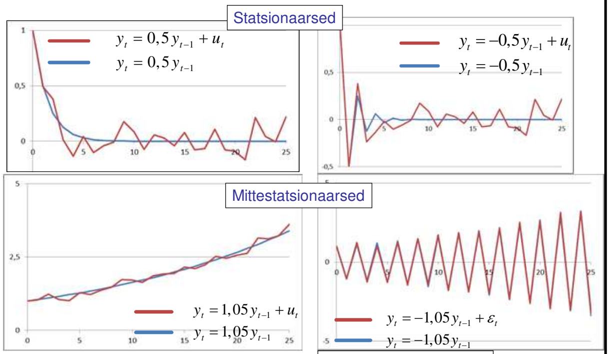
AR(1) $\quad y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$

Karakteristlik võrrand $\quad 1 - \phi_1 \lambda = 0 \qquad$ Lahend $\lambda = \dfrac{1}{\phi_1}$

Tingimus $|\lambda| > 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{|\phi_1|} > 1 \qquad$ Väljaspool ühikringi

AR(1) protsess on statsionaarne, kui $|\phi_1| < 1$

Näited: statsionaarsed ja mittestatsionaarsed AR(1) protsessid



Demo: AR statsionaarsus

Autoregressiivsed libiseva keskmise mudelid ARMA(p,q)

AR(1)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$$

MA(1)

$$y_t = c + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

ARMA(1,1)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

Esimest järku autoregressiivne libiseva keskmise mudel

Demo: ARMA(1,1)

(*p*,*q*) järku autoregressiivne libiseva keskmise mudel ARMA(p,q)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + $$
$$+ u_t + \theta_1 u_{t-1} + \ldots + \theta_q u_{t-q}$$

p järku autoregressiivne komponent

q järku libiseva keskmise komponent

Olulisemad ARMA (*p*,*q*) mudelid

Mudel	Tähistus	Valem
Valge müra	ARMA(0,0)	$y_t = c + u_t$
1. järku autoregressiivne AR(1)	ARMA(1,0)	$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$
2. järku autoregressiivne AR(2)	ARMA(2,0)	$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$
1. järku libisev keskmine MA(1)	ARMA(0,1)	$y_t = c + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
2. järku libisev keskmine MA(2)	ARMA(0,2)	$y_t = c + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$
1. järku autoregressiivne libisev keskmine	ARMA(1,1)	$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$

Integreeritud protsess

- Protsess on **1-st järku integreeritud**, kui protsess on mittestatsionaarne, aga selle 1. järku diferentside aegrida on statsionaarne.
  - Tähistus I(1)
- Protsess on ***k*-ndat järku integreeritud** (*integrated of order k*), kui protsessi *k*-ndat järku diferents on statsionaarne protsess.
  - st statsionaarsuse saavutamiseks tuleb *k* korda diferentsida
  - tähistus I(k)
- Kui protsess on statsionaarne, st statsionaarsuse saavutamiseks pole vaja diferentsida, on I(0) protsess

Integreeritud AR mudelid

Kui aegrea 1. järku diferentsid on kirjeldatavad AR(1) mudeli abil

$$\Delta y_t = c + \phi_1 \Delta y_{t-1} + u_t$$

siis aegrida ise on genereeritud autoregressiivse protsessi ARI (1,1) poolt ja on esitatav järgmiselt

$$y_t = c + (1+\phi_1) y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} + u_t \qquad \text{ARI(1,1)}$$

Kui aegrea statsionaarsuse saavutamiseks tuleb seda diferentsida 2 korda, esitab aegrida mudel ARI(1,2)

Üldiselt ARI (*p*,*d*)

Integreeritud MA mudelid

Kui aegrea 1. järku diferentsid on kirjeldatavad MA(1) mudeli abil

$$\Delta y_t = c + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

siis aegrida ise on genereeritud autoregressiivse protsessi IMA (1,1) poolt ja on esitatav järgmiselt

$$y_t = c + y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \qquad \text{IMA(1,1)}$$

Kui aegrea statsionaarsuse saavutamiseks tuleb seda diferentsida 2 korda, esitab aegrida mudel IMA(2,1)

Üldiselt IMA(d,q)

ARIMA: Integreeritud ARMA mudelid

Autoregressiivsed integreeritud libiseva keskmise mudelid

ARIMA(p,d,q)

p autoregressiivse osa järk

d diferentside järk

q libiseva keskmise järk

- Kui aegrida vajab diferentsimist, siis diferentsitakse seda (tavaliselt 1 või 2 korda) ja diferentsidele rakendatakse sobivat ARMA(*p*,*q*) mudelit.
- *d* järku diferentside ARMA(*p*,*q*) mudel on ekvivalentne ARIMA(*p*,*d*,*q*) mudeliga

Näited

ARIMA(1,1,0) 1. järku diferentside aegrida on AR(1) tüüpi

ARIMA(0,2,2) 2. järku diferentside aegrida on MA(2) tüüpi

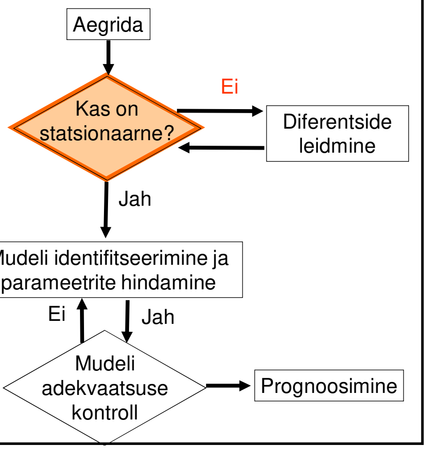
BOX - JENKINSI METOODIKA

Box - Jenkinsi metoodika

Box ja Jenkins (1970) pakkusid välja ARMA mudelite jaoks süstemaatilise lähenemise:

1. Mudeli identifitseerimine, st ARMA järkude (p,q) kindlaks määramine
   - korrelogrammide abil
   - informatsioonikriteeriumi abil
2. Mudeli parameetrite hindamine
3. Mudeli adekvaatsuse hindamine (diagnostika)
   - kas parameetrid on statistiliselt olulised
   - kas jäägid moodustavad valge müra (jääkide autokorrelatsiooni testimine)

Box-Jenkinsi metoodika

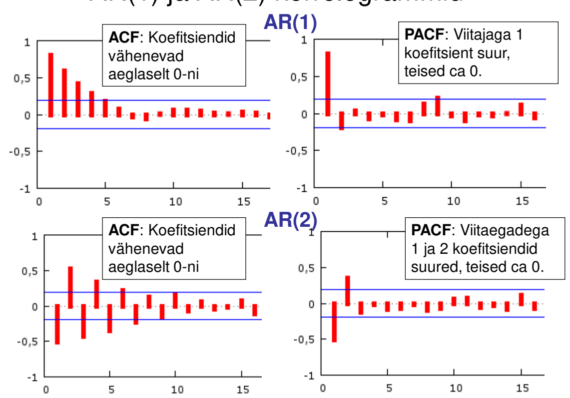


Mudeli identifitseerimine

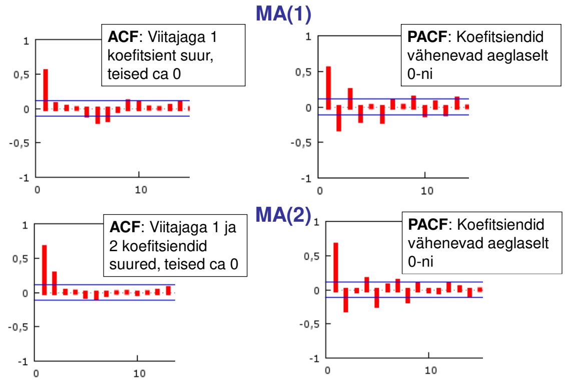
- Otsustatakse
  - Kas on vaja aegrida diferentsida ja kui, siis mitu korda
  - Mitmendat järku autoregressiivset (AR) ja libiseva keskmise (MA) operaatorit kasutada.
    - Tavaliselt üks valik 5-st võimalusest: AR(1), AR(2), MA(1), MA(2), ARMA(1,1)
- AR ja MA valikul võib tugineda
  - Aegrea autokorrelatsiooni (ACF) ning osalise autokorrelatsiooni funktsioonile (PACF) ja vastavate korrelogrammide visuaalsele uurimisele
  - Informatsioonikriteeriumitele: valitakse mudel, mille korral vastav näitaja on väikseim

Demo: korrelogrammid

AR(1) ja AR(2) korrelogrammid



MA(1) ja MA(2) korrelogrammid



ARMA mudeli valik korrelogrammide põhjal

Mudel	ACF	PACF
AR(1), $\beta_1>0$	Eksponentsiaalne vähenemine 0-ni	Viitajaga 1 koefitsient suur, teised ca 0
AR(1), $\beta_1<0$	Ostsilleeruv vähenemine 0-ni	Viitajaga 1 koefitsient suur
AR(p)	Eksponentsiaalne või ostsilleeruv vähenemine 0-ni	Viitajani *p* koefitsiendid nullist erinevad.
MA(1), $\theta_1>0$	Viitajaga 1 koefitsient suur, teised ca 0	Ostsilleeruv vähenemine 0-ni
MA(1), $\theta_1<0$	Viitajaga 1 koefitsient suur	Eksponentsiaalne vähenemine 0-ni
MA(2)	Viitajaga 1 ja 2 koefitsiendid suured, teised ca 0	Eksponentsiaalne või ostsilleeruv vähenemine 0-ni
ARMA(1,1)	Eksponentsiaalne või ostsilleeruv vähenemine 0-ni	Eksponentsiaalne või ostsilleeruv vähenemine 0-ni

Kokkuvõte: AR ja MA järkude määramine ACF ja PACF järgi

Autoregressiivne protsess AR

- eksponentsiaalselt või ostsilleeruvalt kahanev ACF
- oluliselt nullist erinevad PACF väärtused annavad AR järgud

Libiseva keskmise protsess MA

- eksponentsiaalselt või ostsilleeruvalt kahanev PACF
- oluliselt nullist erinevad ACF väärtused annavad MA järgud

PROBLEEM: tihti pole ACF ja PACF graafikute järgi võimalik mudelit üheselt identifitseerida. Siis abiks informatsioonikriteeriumid.

Informatsioonikriteeriumid

Akaike Information Criteria

Akaike informatsioonikriteerium $\mathrm{AIC} = \ln\left(\hat{\sigma}^2\right) + \frac{2k}{T}$

Jääkliikmete dispersioon $\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{T}$ kus *SSE* jääkliikmete ruutude summa

k - hinnatavate parameetrite arv, ARMA(p,q) mudeli korral $k=p+q+1$,
T valimi maht (aegrea pikkus)

$\ln(\sigma^2)$ vähenemist kompenseerib k/T suurenemine. Kui 2. liidetava $2k/T$ suurenemine ületab $\ln(\sigma^2)$ vähenemisest saadava efekti, siis AIC summaarselt suureneb. Siis ei ole mudelisse uue liikme lisamine õigustatud.

Paremaks loetakse mudelit, mille korral AIC on **väiksem**.

Schwarzi kriteerium SIC (ka BIC ehk Bayesi informatsioonikriteerium)

$\mathrm{BIC}(k) = \ln\left(\hat{\sigma}^2\right) + \frac{k}{T}\ln T$

Uute liikmete lisamise suhtes "kriitilisem", kui AIC, sest teine liidetav suureneb kiiremini

Näide valik AIC ja BIC põhjal

AIC

p/q	0	1	2	3	4
0	610,7	607	585,3	585,5	586,2
1	601,7	588,5	583,6	579,6	581,5
2	581,4	583,3	585	581,5	583,5
3	583,2	585	586,8	580,1	580,6
4	584,9	587	580,6	**579,9**	580,9

ARIMA(4,3)

BIC

p/q	0	1	2	3	4
0	614	616,8	598,5	601,9	605,7
1	611,6	601,6	600	599,3	604,5
2	594,5	600	604,6	604,5	609,7
3	600	604,7	609,8	606,3	610,1
4	604,6	609,9	606,8	609,4	**580,9**

ARIMA(4,4)

ARMA mudeli parameetrite hindamine

- Pärast mudeli identifitseerimist viiakse läbi mudeli parameetrite hindamine
- Mudeli diagnostika
  - Kas parameetrite hinnangud on statistiliselt olulised?
  - Kas mudeli jääkliikmed (*residuals*) moodustavad valge müra?
    - leitakse jääkliikmete ACF ja PACF ning uuritakse vastavaid korrelogramme
    - valge müra test Box-Jungi statistiku Q põhjal
  - Kas jääkliikmed alluvad normaaljaotusele?
- Eesmärgiks on ARMA mudelisse koondada aegrea autokorrelatsiooni struktuur, et järele jääks ainult valge müra

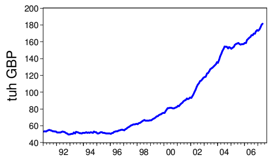
Näide: majade hinnad UK-s

ukhp.gdt

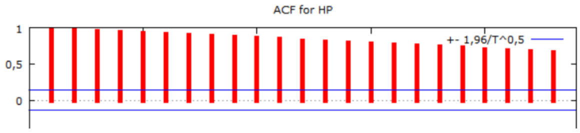
Allikas: Brooks, Introductory Econometrics for Finance

Jaanuar 1991 – mai 2007

Hind HP, tuh GBP
Mittestatsionaarne aegrida
T=197



Mittestatsionaarse aegrea korrelogramm: ACF väheneb väga aeglaselt



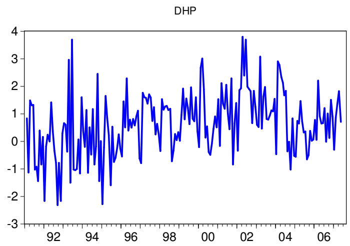
Näide: majade hinnad UK-s, muutus protsentides

ukhp.gdt

Hinna muutus protsentides

$$DHP_t = \frac{\Delta HP_t}{HP_{t-1}} \cdot 100$$

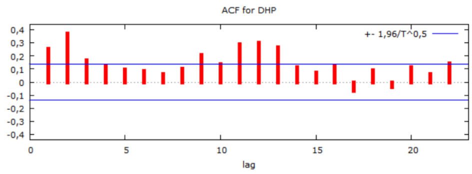
Statsionaarne aegrida
T=196



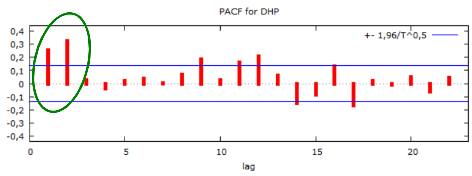
Näide: majade hinnad UK-s, DHP korrelogrammid

ukhp.gdt

ACF väheneb ostsilleerudes, järelikult AR tüüpi



PACF-I kaks tippu, järelikult AR(2)



Näide: majade hinnad UK-s, AR(2) mudeli aruanne

ukhp.gdt

Kesk-väärtus μ

Kordajate Φ_1 ja Φ_2 hinnangud

```
             coefficient   std. error     z      p-value
  ------------------------------------------------------
  const      0,635701      0,147303     4,316   1,59e-05 ***
  phi_1      0,168334      0,0671496    2,507   0,0122   **
  phi_2      0,329653      0,0676692    4,872   1,11e-06 ***

Mean dependent var   0,636252   S.D. dependent var   1,146288
Mean of innovations  0,002366   S.D. of innovations  1,043960
Log-likelihood      -286,6917   Akaike criterion     581,3834
Schwarz criterion    594,4959   Hannan-Quinn         586,6920

                   Real   Imaginary   Modulus  Frequency
  ------------------------------------------------------
  AR
    Root  1       1,5050    0,0000     1,5050    0,0000
    Root  2      -2,0156    0,0000     2,0156    0,5000
  ------------------------------------------------------
```

Karakteristliku võrrandi juured

Juurte absoluutväärtused (moodulid) >1, järelikult statsionaarne

Näide: majade hinnad UK-s, AR(2) mudeli aruanne

ukhp.gdt

Aegrea (realisatsiooni) keskväärtus

Kordaja

Standard-viga

$z = \frac{\text{kordaja}}{\text{standardviga}}$ z-statistik

Olulisuse tõenäosus p

```
             coefficient   std. error     z      p-value
  ------------------------------------------------------
  const      0,635701      0,147303     4,316   1,59e-05 ***
  phi_1      0,168334      0,0671496    2,507   0,0122   **
  phi_2      0,329653      0,0676692    4,872   1,11e-06 ***

Mean dependent var   0,636252   S.D. dependent var   1,146288
Mean of innovations  0,002366   S.D. of innovations  1,043960
Log-likelihood      -286,6917   Akaike criterion     581,3834
Schwarz criterion    594,4959   Hannan-Quinn         586,6920
```

Jääkliikmete ehk šokkide u keskväärtus

Jääkliikmete u standardhälve

Schwarzi informatsioonikriteerium

Akaike informatsioonikriteerium

Näide: majade hinnad UK-s, AR(2) mudeli kirjutamine

ukhp.gdt

AR(2) mudeli üldkuju $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$

AR(p) keskväärtuse valemist $\mu = \dfrac{c}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} \Rightarrow c = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right)$

Arvutame c $c = 0,635701 \cdot (1 - 0,168334 - 0,329653) \approx 0,319$

NB! See on keskväärtus μ

$$y_t = 0,319 + 0,168\, y_{t-1} + 0,330\, y_{t-2} + u_t$$

```
             coefficient   std. error     z      p-value
  ------------------------------------------------------
  const      0,635701      0,147303     4,316   1,59e-05 ***
  phi_1      0,168334      0,0671496    2,507   0,0122   **
  phi_2      0,329653      0,0676692    4,872   1,11e-06 ***
```

Näide: majade hinnad UK-s, jääkliikmete autokorrelatsiooni testimine

LAG	ACF		PACF		Q-stat.	[p-value]
1	0,0544		0,0544		0,5897	[0,443]
2	0,0204		0,0175		0,6726	[0,714]
3	0,0422		0,0403		1,0300	[0,794]
4	-0,0823		-0,0875		2,3998	[0,663]
5	0,0886		0,0976		3,9945	[0,550]
6	0,0044		-0,0057		3,9985	[0,677]
7	-0,0507		-0,0473		4,5268	[0,717]
8	0,0498		0,0416		5,0394	[0,753]
9	0,1089		0,1240	*	7,5002	[0,585]
10	-0,0152		-0,0378		7,5486	[0,673]
11	0,1311	*	0,1223	*	11,1533	[0,431]
12	-0,0743		-0,0861		12,3179	[0,421]
13	0,1252	*	0,1568	**	15,6436	[0,269]
14	-0,0498		-0,1215	*	16,1713	[0,303]
15	0,0022		0,0673		16,1724	[0,371]
16	0,0938		0,0424		18,0699	[0,320]
17	-0,1238	*	-0,1032		21,3917	[0,209]
18	0,0593		0,0393		22,1571	[0,225]
19	-0,0398		-0,0490		22,5042	[0,260]
20	0,0388		0,0606		22,8369	[0,297]
21	-0,0204		-0,0696		22,9290	[0,348]
22	0,0046		0,0055		22,9338	[0,405]
23	0,0078		0,0447		22,9475	[0,464]
24	0,1273	*	0,0805		26,6026	[0,323]
25	0,0784		0,0883		27,9967	[0,308]
26	0,0370		0,0185		28,3097	[0,343]

Valge müra kuni viitajani 26

PROGNOOSIMINE

Prognoosimine ja tinglik keskväärtus

Aegrida $Y_t = \{y_1, y_2, ..., y_T\}$

Eeldame, et genereeriv protsess on hinnatud, st

1. korrelatsiooni struktuur on teada;
2. parameetrid on hinnatud.

Tähistame kogu informatsiooni, mis on teada ajahetkeks *t* Ω_t

Seda informatsiooni kasutades saame leida aegrea tingliku keskväärtuse ajahetkel *t*+1

$$E\left[y_{t+1} | \Omega_t\right]$$

Ajahetkel *t* tehtud prognoos (*forecast*) *F* on tinglik keskväärtus, sõltub ajahetkeks *t* teadaolevast informatsioonist.

$$F_{t,1} = E\left[y_{t+1} | \Omega_t\right]$$ 1 samm edasi

$$F_{t,h} = E\left[y_{t+h} | \Omega_t\right]$$ *h* sammu edasi

Prognoosimine MA mudeli korral

MA(3) mudel $y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3}$

Erineva pikkusega prognoosid ajahetkel *t*.

$$F_{t,1} = E\left[y_{t+1} | \Omega_t\right] = \mu + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2}$$

$$F_{t,2} = E\left[y_{t+2} | \Omega_t\right] = \mu + \theta_2 u_t + \theta_3 u_{t-1}$$

$$F_{t,3} = E\left[y_{t+3} | \Omega_t\right] = \mu + \theta_3 u_t$$

$$F_{t,4} = E\left[y_{t+4} | \Omega_t\right] = \mu$$

$$F_{t,5} = E\left[y_{t+5} | \Omega_t\right] = \mu$$

....

Kui prognoosime kaugemale, kui MA protsessi järk *q*, on prognoosiks protsessi keskväärtus:

$$F_{t,h} = E\left[y_{t+h} | \Omega_t\right] = \mu, \quad h > q$$

MA protsessi mälu pikkus on *q* perioodi. See määrab ära prognoosi horisondi.

Prognoosimine AR mudeli korral

Näiteks AR(2) mudel $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$

Erineva pikkusega prognoosid ajahetkel *t*.

$$F_{t,1} = E\left[y_{t+1} | \Omega_t\right] = c + \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}$$

$$F_{t,2} = E\left[y_{t+2} | \Omega_t\right] = c + \phi_1 F_{t,1} + \phi_2 y_t$$

$$F_{t,3} = E\left[y_{t+3} | \Omega_t\right] = c + \phi_1 F_{t,2} + \phi_2 F_{t,1}$$

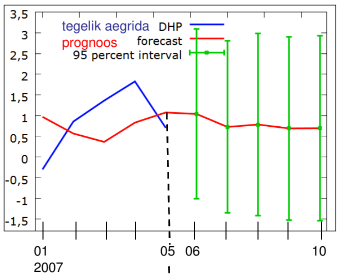
Prognoosimisel kasutatakse eelmisi prognoose

Staatiline ja dünaamiline prognoosimine

- Dünaamiline prognoosimine
  - Aluseks olemasolevad tegelikud väärtused + eelnevalt prognoositud väärtused
  - Prognoositakse väärtusi, mis pole teada (praktiline vajadus)
- Staatiline prognoosimine
  - Ühesammuline prognoosimine
  - Järgmise väärtuse prognoosimiseks võetakse aluseks eelmised aktuaalsed väärtused.
  - Võimalik ainult valimi sees (*in sample*)
  - Kasutatakse mudeli prognoosimisvõime hindamiseks

Näide: staatiline ja dünaamiline prognoosimine

Majade hinnad UK-s, hinna muutus protsentides. Aegrida kuni 05.2007. Prognoos kuni 10.2007



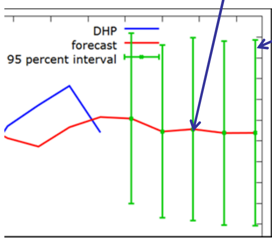
staatiline prognoosimine

dünaamiline prognoosimine

Prognoosi punkthinnang ja vahemikhinnang

$F_{t,h} = E[y_{t+h} \mid \Omega_t]$ punkthinnang

Vahemikhinnang: antakse prognoosi usalduspiirid 95%-lise usaldatavusega.



prediction	std. error	95% interval
1,03931	1,04396	-1,00681 - 3,08544
0,726326	1,05865	-1,34859 - 2,80124
0,784008	1,12268	-1,41640 - 2,98442
0,690541	1,12916	-1,52258 - 2,90366
0,693822	1,13825	-1,53711 - 2,92475

Prognoosi standardviga

Prognooside hindamine prognoosivea järgi

$$ME = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t$$

Mean Error, keskmine viga
Iseloomustab prognoosi nihet: üles või alla

$$MSE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t^2$$

Mean Square Error, ruutkeskmine viga

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t^2}$$

Root Mean Square Error, juuritud ruutkeskmine viga

$$MAE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |u_t|$$

Mean Absolute Error, keskmine absoluutne viga

$$MPE = 100\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{u_t}{y_t}$$

Mean Percentage Error, keskmine suhteline viga, protsentides

$$MAPE = 100\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{|u_t|}{y_t}$$

Mean Absolute Percentage Error, keskmine absoluutne suhteline viga, protsentides

Näide: Eesti THI 1998-2012

Modelleeriti 1. järku diferentse.

	AR(1)	AR(2)

1. Mõlema mudeli korral jääkliikmetel autokorrelatsioon puudub 12. viitajani
2. Jääkliikmed ei allu normaaljaotusele.

	AR(1)	AR(2)
Akaike ik	347,86	345,53 *
Schwarzi ik	357,42 *	358,28

	AR(1)	AR(2)
Mean Error	-0,00099305	-0,0017645
Mean Squared Error	0,39523	0,38573
Root Mean Squared Error	0,62868	0,62107
Mean Absolute Error	0,48171	0,47873
Mean Percentage Error	-0,0077465	-0,0067933
Mean Absolute Percentage Error	0,3307	0,3288
Theil's U	0,76658	0,76079

Prognoos mõnevõrra parem

Theil'i U (programmis Gretl)

Naiivne prognoos: $y_{t+1} = y_t$

Mingi mudeli abil saadud prognoos F_t

Kui palju on mudeli abil tehtud prognoos parem naiivsest prognoosist?

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1}\left(\frac{F_{t+1} - y_{t+1}}{y_t}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1}\left(\frac{y_t - y_{t+1}}{y_t}\right)^2}}$$

mudeli abil tehtud prognoosi põhjal

naiivse prognoosi põhjal

$U > 1$ mudeli abil tehtud prognoos on halvem, kui naiivne prognoos
$U = 1$ mudeli abil tehtud prognoos on sama, mis naiivne
$U < 1$ mudeli abil tehtud prognoos on parem, kui naiivne prognoos

Theil, H. (1966) Applied Economic Forecasting, Amsterdam: North-Holland

NÄIDE: USA tööstustoodangu indeks

ip.gdt

USA tööstustoodangu indeks kvartalite kaupa.
Modelleerimiseks kasutatud ajavahemik 1961:1 – 1998:3
Modelleeritud indeksi logaritmi sesoonseid diferentse

Mudel ARMA(2,0)

Mean Error	1,1587e-008
Mean Squared Error	0,00045565
Root Mean Squared Error	0,021346
Mean Absolute Error	0,014756
Mean Percentage Error	19,809
Mean Absolute Percentage Error	15,37
Theil's U	$\boxed{0{,}93823}$

Prognoos parem kui naiivne

Mudel ARMA(2,5)

Mean Error	0,00078397
Mean Squared Error	0,00037823
Root Mean Squared Error	0,019448
Mean Absolute Error	0,012795
Mean Percentage Error	23,563
Mean Absolute Percentage Error	6,8752
Theil's U	$\boxed{1{,}035}$

Prognoos halvem kui naiivne