



AUDENTESE ÜLIKOOL
AUDENTES UNIVERSITY

MAJANDUSMATEMAATIKA II
1.osa
Diferentsiaalarvutus

Ako Sauga

Tallinn 2005

1. ÜHE MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALARVUTUS

Probleeme, mis nõuavad diferentsiaalarvutust

Majandusanalüüsi korral uuritakse majandusalaste suuruste vahelisi seoseid, mis on kirjeldatud funktsionaalse sõltuvusena. Toome näiteks mõningad probleemid, mida võib uurida majandusanalüüsi:

- ▶ Kas toodangu hinna suurendamisel ettevõtte kasum suureneb või väheneb?
- ▶ Millisel määral võivad kapitalimahutused asendada lisatööjõudu?
- ▶ Millise tootmismahu juures on kulu tooteühiku kohta kõige väiksem?
- ▶ Kui tundlik on hüvise nõudlus hinna muutustele?
- ▶ Kuidas mõjutab maksude suurendamine laekumisi riigieelarvesse?

Vastuse leidmiseks nendele küsimustele konstrueeritakse algul vastavad mudelid ja siis uuritakse neid diferentsiaalarvutuse meetodite abil.

Ülesannete liigitus:

Optimeerimisülesanded. Majandusalases tegevuses tuleb tihti analüüsida, millal on tootlikkus maksimaalne, kasum maksimaalne, kulud minimaalsed jne. Maksimumi või miinimumi leidmist nimetatakse **optimeerimiseks**. Tihti lisanduvad optimeerimisülesandele teatud kitsendused ressursside piiratuse tõttu. P_{\max}, C_{\min} .

Marginaalanalüüs. Kui meid huvitab, kuidas muutub kogutulu või kulu tootmismahu suurendades (vähendades), tuleb kasutada marginaalanalüüsi (piirväärtusanalüüsi), mis uurib funktsiooni muutumist argumendi ühikulise muutuse korral. $\Delta x \Rightarrow \Delta y$.

Elastsusanalüüs uurib näiteks seda, kui suure muutuse nõutavas või pakutavas koguses tekitab 1%-line hinna muutus. Erinevalt marginaalanalüüsist uurib elastsusanalüüs suhtelisi muutusi.

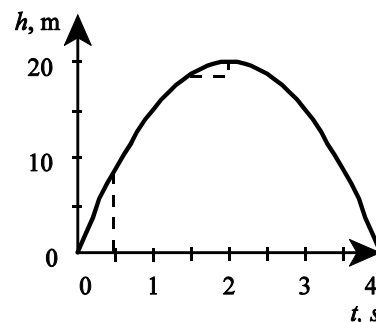
$$\frac{\Delta x}{x} \% \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} \%$$

Funktsiooni muutumine ja keskmine kiirus lõigul.

NÄIDE 1.1. Kiiruse muutumine

Kivi visatakse vertikaalselt üles kiirusega 20 m/s. Uurime, kuidas muutub kivi kiirus.

aeg t	0	0,5	1,5	2	3,5	4
kõrgus h	0	8,75	18,75	20	8,75	0
kiirus $v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$		$v = \frac{8,75 - 0}{0,5 - 0} = 17,5$	$v = \frac{20 - 18,75}{2 - 1,5} = 2,5$		$v = \frac{0 - 8,75}{4 - 3,5} = -17,5$	



Erinevatel teelõikudel on kivi keskmine kiirus erinev.

Funktsiooni muutumise kiirust võib uurida suvalise funktsiooni korral.

Näiteks

- ▶ kui kiiresti muutub kasum tootmismahu muutudes;
- ▶ kui kiiresti muutuvad kulud tootmismahu muutudes;
- ▶ kui kiiresti muutuvad nõutav ja pakutav kogus hüvise hinna muutudes.

Joonis 1

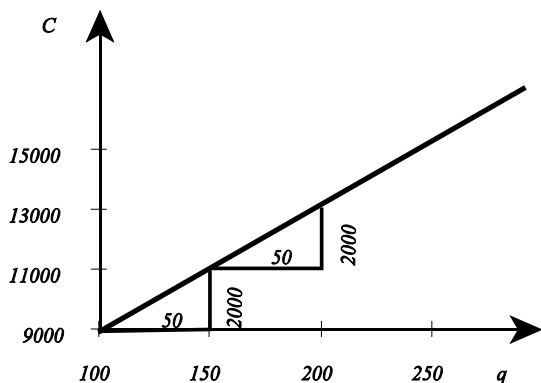
NÄIDE 1.2. Kulude muutumise kiirus

Kirjeldagu kulude C sõltuvust kogusest q lineaarne funktsioon $C(q) = 40q + 5000$. Leiame kulufunktsiooni muutumise kiiruse, kui kogus muutub 100-st 150-ni ja 150-st 200-ni.

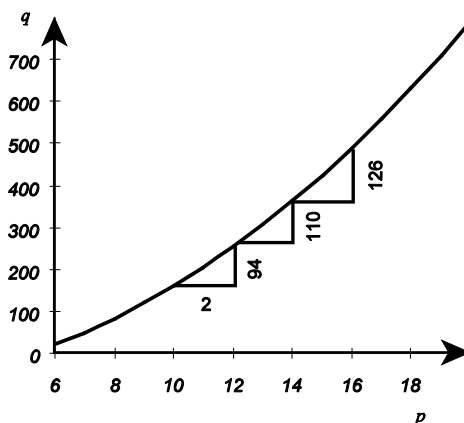
Kogus q	Kulud C	Koguse muut $\Delta q = q_B - q_A$	Kulude muut $\Delta C = C_B - C_A$	Kulude muutumise kiirus $\frac{\Delta C}{\Delta q}$
100	9000			
150	11000	50	2000	40
200	13000	50	2000	40

Lineaarse kulufunktsiooni korral vastab konstantsele koguse muutumisele konstantne kulude muutus, s.t. kulude muutumise kiirus on konstantne (joonis 2).

Lineaarse funktsiooni muutumise kiirus on konstantne.



Joonis 2 Lineaarse funktsiooni muutumine



Joonis 3 Mittelineaarse funktsiooni muutumine

NÄIDE 1.3. Pakutava koguse muutumise kiirus
Olgu meil pakkumisfunktsioon $q(p) = 2p^2 + 3p - 70$, kus q on pakutav kogus ja p on hind. Leiame pakutava koguse muutumise kiiruse erinevates hinnavahemikes (vt kõrvalolev tabel). Näeme, et ühesugusele hinna muutusele vastavad erinevad pakutava koguse muutused, s.t. funktsiooni muutumise kiirus muutub. Vastavad muudud on esitatud joonisel 3.

Hind p	Pakutav kogus q	Hinna muut $\Delta p = p_B - p_A$	Pakutava koguse muut $\Delta q = q_B - q_A$	Pakutava koguse muutumise kiirus $\frac{\Delta q}{\Delta p}$
10	160			
12	254	2	94	47
14	364	2	110	55
16	490	2	126	63

Mittelineaarse funktsiooni muutumise kiirus muutub.

Funktsiooni muutumise **keskmise kiiruse** leidmiseks lõigul tuleb funktsiooni muut Δy jagada argumendi muuduga Δx :

$$\text{funktsiooni muutumise keskmine kiirus} = \frac{\text{funktsiooni muut}}{\text{argumendi muut}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Funktsiooni muutumise kiirust võib leida suvalise funktsiooni jaoks. Alljärgnevas tabelis on toodud näiteid erinevate funktsioonide kohta:

Sõltuvus	Funktsioon	Argument	Funktsiooni muut	Argumendi muut	Funktsiooni muutumise kiirus, ühik
Teepikkuse s sõltuvus ajast t	teepikkus s	aeg t	teepikkuse muut Δs	aja muut Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Hinna p sõltuvus ajast t	hind p	aeg t	hinna muut Δp	aja muut Δt	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$ $\frac{\text{krooni}}{\text{kuus}}$
Koguse q sõltuvus hinnast p	kogus q	hind p	koguse muut Δq	hinna muut Δp	$\frac{\Delta q}{\Delta p}$ $\frac{\text{tükki}}{\text{kroon}}$
Kasumi P sõltuvus hinnast p					

ÜLESANDED

1.1 Tulufunktsioon on $R = 500q$, kus q on müüdav kogus. Milline on tulude muutumise kiirus, kui me suurendame kogust

- 1000-lt 1500-ni;
- 1500-lt 2000-ni?

1.2 Tulufunktsioon on $R = -4q^2 + 5000q$, kus q on müüdav kogus. Milline on tulude muutumise kiirus, kui me suurendame kogust

- 50-lt 75-ni;
- 75-lt 100-ni.

1.3 Leida maakera rahvaarvu muutumise keskmine kiirus vahemikus 2000.a. kuni 2005.a., kui rahvaarvu muutumise mudeliks on funktsioon $N(t) = 4,85 e^{0,015t}$. Suurus N on rahvaarv miljardites ja t aeg aastates ($t = 0$ aastal 1984).

1.4 Kulufunktsioon on $C(q) = 0,15q^2 + 25q + 4000$ kr, kus q on tootmismah. Leida, kui kiiresti muutub keskmine kulu ühiku kohta, kui tootmismah muutub

- 100-lt ühikult 150 ühikuni;
- 150-lt ühikult 200 ühikuni.

1.5 Bussi keskmine kiirus sõidul Tallinnast Tartusse on 80 km/h. Kui palju aega kulub bussil selle vahemaa läbimiseks, kui Tallinna ja Tartu vaheline kaugus on 185 km?

1.6 Aktsia hinna keskmine muutumise kiirus 1998.a oli 2,31 kr kuus. Milline oli aktsia hind 1998.a. aasta lõpul, kui aasta algul oli see 51,25 kr?

1.7 Kulufunktsioon on $C(q) = 0,012q^2 + 120q + 51000$ kr, kus q on tootmismah. Leida, kui kiiresti muutub keskmine kulu ühiku kohta, kui tootmismah muutub

- 1000-lt ühikult 1500 ühikuni;
- 3000-lt ühikult 3500 ühikuni.

1.8 Õhutemperatuuri keskmine muutumise kiirus vahemikus 8.00 kuni 12.00 oli 2°C tunnis. Leida, milline oli temperatuur kell 8.00, kui kell 12.00 oli see 25°C .

1.9 Näidata, et lineaarse kulufunktsiooni $C(q) = aq + b$ korral tootmismahu muutudes koguselt q_1 koguseni q_2 on keskmise ühikulise kulu muutumise kiirus $-\frac{b}{q_1 q_2}$.

Funktsiooni tuletis.

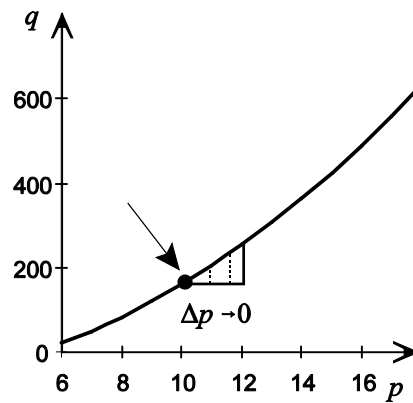
NÄIDE 1.4. Koguse muutumise kiirus konkreetse hinna korral.

Uurime veel näites 3 toodud pakkumisfunktsiooni $q(p) = 2p^2 + 3p - 70$ ja selle muutumise kiirust. Valemi $\frac{\Delta q}{\Delta p}$ järgi leitud

kiirus iseloomustab muutumist vahemikus $(p; p + \Delta p)$ (joonis 4). Kuidas leida aga muutumise kiirust punktis, kus $p = 10$?

Sellisel juhul tuleb vahemikku Δp hakata vähendama, s.t. tuleb üle minna piirile $\Delta p \rightarrow 0$ ja leida, millele läheneb sel juhul suhe

$\frac{\Delta q}{\Delta p}$. Kiiruse leidmiseks antud punktis tuleb leida piirväärtus: $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$.



Joonis 4

Funktsiooni kiiruse leidmiseks punktis x tuleb leida suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus argumendi muudu Δx lähenemisel 0.

Tuletis on funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx jagatise piirväärtus argumendi muudu lähenemisel nullile:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Suurust dx nimetatakse suuruse x **diferentsiaaliks** ja see tähendab lõpmatult väikest muutu.

Tuletise märkimiseks kasutatakse ka järgmist tähistust: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funktsiooni muutumise **kiiruse** leidmiseks antud punktis tuleb leida funktsiooni tuletis.



Leiame lineaarse funktsiooni $y = ax + b$ tuletise.

1. Funktsiooni muut:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x$$

2. Funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx jagatis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

3. Funktsiooni muudu ja argumendi muudu jagatise piirväärtus argumendi muudu lähenemisel nullile:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a$$

Näitasime, et lineaarse funktsiooni tuletis on konstantne ja võrdub lineaarliikme ees oleva kordajaga a :

$$(ax + b)' = a$$

Leiame funktsiooni $y = x^2$ tuletise.

1. Funktsiooni muut:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

2. Funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx jagatis:

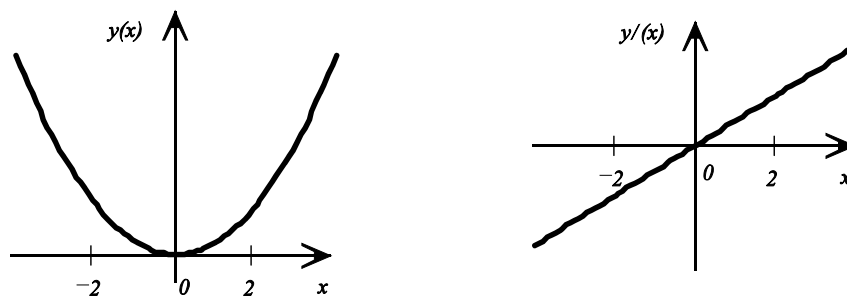
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

3. Funktsiooni muudu ja argumendi muudu jagatise piirväärtus argumendi muudu lähenemisel nullile:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

Seega funktsiooni $y(x) = x^2$ tuletis on omakorda funktsioon argumendist x , võime näiteks tähistada $(x^2)' = g(x) = 2x$.



Joonis 6 Funktsiooni x^2 ja tema tuletise graafikud

Funktsiooni tuletis on omakorda funktsioon, mille väärtus sõltub argumendist.

ÜLESANDED

1.10 Toote A läbimüügi muutumist eelmisel aastal võib lähendada funktsiooniga $y = 0,2t + 7$, kus y on läbimüük tuhandetes ja t aeg kuudes. Leida

- läbimüügi tuletis aja t järgi;
- läbimüügi muutumise kiirus ajahetkel t .

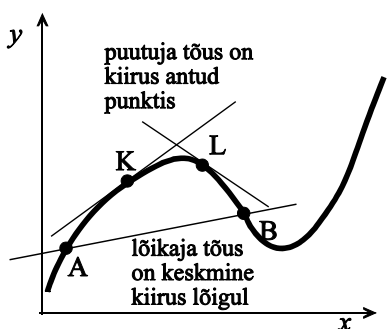
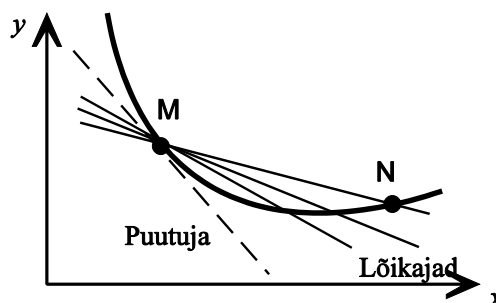
1.11 *) Näidata, et funktsiooni $y = ax^2$ tuletis $y' = 2ax$.

1.12 *) Näidata, et funktsiooni $y = x^3$ tuletis $y' = 3x^2$.

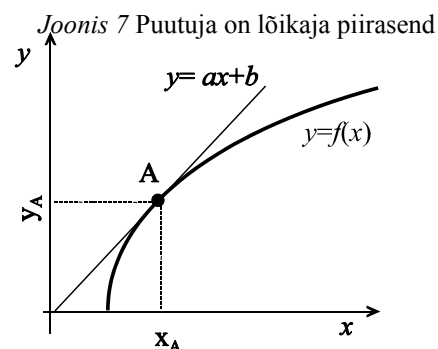
Tuletis ja funktsiooni graafiku puutuja

Joone puutujaks punktis M nimetatakse joone lõikaja MN piirasendit punkti N liikumisel mööda joont punktini M (joonis 7).

Puutuja võrrandiks on sirge võrrand $y = ax + b$ ja selles olevat kordajat a nimetatakse **puutuja tõusuks**.



Joonis 8 Lõikaja ja puutujad



Joonis 9 Puutuja

lõikaja tõus = funktsiooni keskmine kiirus lõigul
 puutuja tõus = funktsiooni kiirus antud punktis = funktsiooni tuletis antud punktis

Puutuja tõus võib olla positiivne, negatiivne või null.

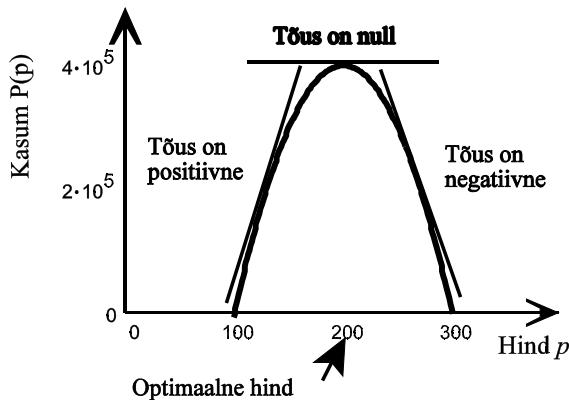
NÄIDE 1.5. Kasumi sõltuvus hinnast.

Analüüs on näidanud, et ettevõtte A kasum P sõltub hinnast p järgmisel kujul:

$$P(p) = -40p^2 + 16\,000p - 1\,200\,000.$$

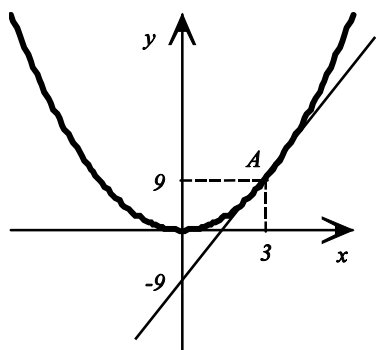
Vastava funktsiooni graafik on toodud joonisel 10.

Graafikult on näha, et vasakul pool maksimumi on puutuja tõus positiivne, hinna kasvades kasum kasvab. Paremal pool maksimumi on puutuja tõus negatiivne, hinna kasvades kasum kahaneb. Funktsiooni maksimumpunktis on graafiku puutuja horisontaalne, tõus on null. **Optimaalne hind** on hind, mille korral kasum on maksimaalne. Graafikul vastab sellele hinnale kõrgeim punkt - tipp.

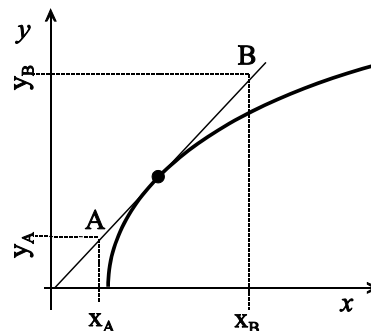


Joonis 10 Kasumi graafik ja optimaalne hind

Teades, et funktsiooni tuletise väärtus antud punktis võrdub selles punktis funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja tõusuga, $a = y'(x_A)$, on võimalik leida joone puutuja võrrandit.



Joonis 11 Puutuja võrrandi leidmine



Joonis 12 Puutuja tõusu leidmine graafikult

NÄIDE 1.6. Puutuja võrrandi leidmine

Leida funktsioonile $y = x^2$ punktis A (3; 9) tõmmatud puutuja võrrand.

Puutuja võrrand on kujul $y = ax + b$. Tõusu a leidmiseks leiame funktsiooni tuletise väärtuse antud punktis:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 \\ y'(x) &= 2x \\ y'(3) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Vabaliikme b leidmiseks arvestame sellega, et puutuja peab läbima punkti A (3; 9) (vt joonis 11), järelikult võrrand peab olema selline, et selle punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit:

$$\begin{aligned} y_A &= ax_A + b \\ 9 &= 6 \cdot 3 + b \\ b &= -9 \end{aligned}$$

Vastus: Funktsioonile $y = x^2$ punktis A (3; 9) tõmmatud puutuja võrrand on $y = 6x - 9$.

Teiselt poolt on funktsiooni graafikult võimalik leida tuletise väärtust etteantud punktis. Selleks tuleb vastavas punktis joonistada graafikule puutuja ja leida selle puutuja tõus. Puutuja tõusu leidmiseks valime puutulal 2 punkti: A ($x_A; y_A$) ja B ($x_B; y_B$) (vt joonis 12). Mõlema punkti koordinaadid peavad rahuldama sirge võrrandit:

$$\begin{cases} ax_A + b = y_A \\ ax_B + b = y_B \end{cases}$$

Saadud võrrandsüsteemi lahendamine suuruse a suhtes annab meile valemid puutuja tõusu leidmiseks:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Teades keskmist kiirust v_k ja funktsiooni väärtust lõigu otspunktis y_A , võime leida funktsiooni väärtuse lõigu teises otspunktis $y_B = y_A + v_k(x_B - x_A)$.

Teades kiirust antud punktis K, võime leida:

- ▶ kas funktsioon kasvab (kiirus on positiivne) või kahaneb (kiirus on negatiivne) antud punktis;
- ▶ kui kiiresti funktsioon kasvab või kahaneb antud punktis.

Elementaarfunktsioonide tuletisi

 $a = \text{const}$

	$y(x)$	$y'(x)$
1	a	0
2	x^a	ax^{a-1}
3	a^x	$a^x \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\arctan x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
14	$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Tuletise leidmise reegleid

1. Konstandiga korrutamine. Kui a on mingi konstant ja $y(x)$ funktsioon x -st siis

$$(ay(x))' = ay'(x)$$

2. Funktsioonide summa (vahe) tuletis on funktsioonide tuletiste summa (vahe)

$$[y(x) + g(x)]' = y'(x) + g'(x)$$

$$[y(x) - g(x)]' = y'(x) - g'(x)$$

3. Korrutise tuletis. Funktsioonide $u(x)$ ja $v(x)$ korrutise tuletis leitakse järgmisest valemist:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

4. Jagatise tuletis. Funktsioonide $u(x)$ ja $v(x)$ jagatise tuletis leitakse järgmisest valemist:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Näiteid reeglite kasutamise kohta

$$1. (4x)' = 4x' = 4; \quad (10x^3)' = 10(x^3)' = 30x^2; \quad (ax^2)' = a(x^2)' = 2ax$$

$$2. (3x^2 + 2x)' = (3x^2)' + (2x)' = 6x + 2; \quad (\ln x - 3x)' = (\ln x)' - (3x)' = \frac{1}{x} - 3$$

$$3. (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$4. \left(\frac{2x}{x+3}\right)' = \frac{(2x)'(x+3) - 2x(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3) - 2x \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

NÄIDE 1.7. Kasumi muutumise kiirus.

Urime kasumifunktsiooni

$$P(p) = -40p^2 + 16000p - 1200000.$$

Leiame

a) kasumi muutumise kiiruse sõltuvus hinnast;

b) kui suur on kasumi muutumise kiirus hindade 100 kr, 150 kr ja 250 kr korral;

Lahendus:

a) Kasumi muutumise kiiruseks on tuletis kasumifunktsioonist:

$$P'(p) = -40 \cdot 2p + 16000 = -80p + 16000$$

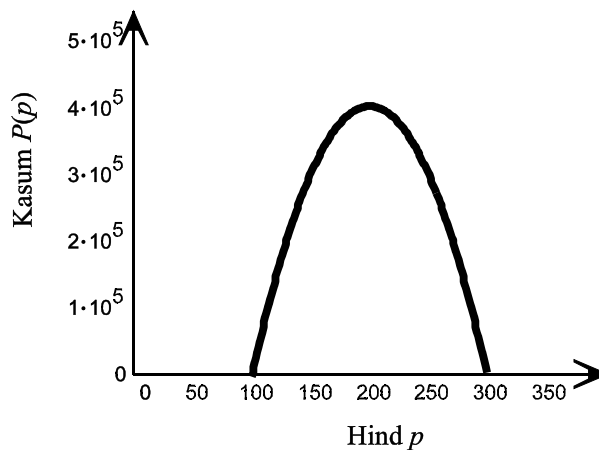
See tähendab, et kui hinda p muuta 1 krooni võrra, siis kasum muutub $-80p + 16000$ krooni võrra.

b) Leiame kasumi muutumise kiiruse erinevate hindade korral:

$$P'(100) = -80 \cdot 100 + 16000 = 8000$$

$$P'(150) = -80 \cdot 150 + 16000 = 4000$$

$$P'(250) = -80 \cdot 250 + 16000 = -4000$$



Joonis 15

Analüüsime saadud tulemusi:

- ▶ 100 kroonise hinna korral on kasumi muutumise kiirus 8000 (kasumi) kr ühe (hinna) krooni kohta;
- ▶ 150 kroonise hinna korral on kasumi muutus 4000 kr/kr, s. t. nüüd mõjutab hind kasumit vähem
- ▶ 250 kroonise hinna korral on tuletis negatiivne, järelikult kasv on negatiivne ehk tegemist on kahanemisega. Hinna suurendamine 1 kr võrra vähendab kasumit 4000 krooni võrra.

ÜLESANDED

1.16 Leida järgmiste funktsioonide tuletis.

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } y = x^{27}; & \text{b) } y = \frac{1}{x^{27}}; & \text{c) } y = \sqrt[3]{x}; & \text{d) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{e) } y = \sqrt[3]{x^2} & \text{f) } y = x^{-0,12} \\ \text{g) } y = x^b; & \text{h) } y = \sqrt[c]{x^2} & \text{i) } y = x^{-0,5} & \text{j) } y = \sqrt[4]{x^3} & \text{k) } y = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} \end{array}$$

1.17 Leida järgmiste funktsioonide tuletis.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^2 + 2x + 3 & \text{b) } y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6 & \text{c) } y = x^9 - 5x^8 + x + 12 \\ \text{d) } y = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{2}x^6 - x + 2 & \text{e) } y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{f) } y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \\ \text{g) } y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{h) } y = -\frac{x^2}{16} + \frac{2}{x} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3x^2} + \frac{x}{3} & \text{i) } y(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

1.18 Leida järgmiste funktsioonide tuletis, kasutades korrutise tuletise leidmise reeglit.

$$\text{a) } f(x) = (2x + 1)(3x - 2) \quad \text{b) } f(u) = (2u^2 - 5)(1 - 2u) \quad \text{c) } y = 10(3u + 1)(1 - 5u)$$

1.19 Leida järgmiste funktsioonide tuletis, kasutades korrutise tuletise leidmise reeglit.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^4 \ln x & \text{b) } y = \sqrt{x} e^x & \text{c) } y = \sin x \cos x \\ \text{d) } y = 15^x x^{15} & \text{e) } y = \sin^2 x & \text{f) } y = e^{2x} \end{array}$$

1.20 Leida järgmiste funktsioonide tuletis.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x+1}{x-2} & \text{b) } f(t) = \frac{t}{t^2-2} & \text{c) } y = \frac{3}{x+5} \\ \text{d) } y = \frac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-1} & \text{e) } y = \frac{2x-3}{5x+4} & \text{f) } f(t) = \frac{t^2+1}{1-t^2} \end{array}$$

1.21 Joonisel 14 toodud läbimüügi muutust kirjeldab funktsioon $L(t) = t^3 - 6t^2 + 10t + 100$ (tuh kr), kus t on kuude arv, mis on möödunud firma loomisest. Arvutada läbimüügi muutumise kiirus

- a) 0,5 kuud pärast firma loomist;
- b) 2 kuu pärast;
- c) 4 kuu pärast

Võrrelda tulemusi ülesandes 1.15 saadud tulemustega.

1.22 Firma on uurinud oma töötajate töö tootlikkust ja leidnud, et kui töötaja on töötanud t aastat, siis tema kuu tootlikkus on avaldatav järgmise funktsioonina: $f(t) = -2t^2 + 28t + 100$. Leida tootlikkuse muutumise kiiruse sõltuvus tööaastast.

1.23 t aasta pärast (alates tänavusest) on kohaliku ajalehe tiraaž $N(t) = 100t^2 + 400t + 5000$. Leida funktsioon, mis kirjeldab tiraaži muutumise kiirust t aasta pärast. Millise kiirusega muutub tiraaž 5 aasta pärast? Kas tiraaž suureneb või väheneb sel ajal?

1.24 Kasum sõltub hinnast p järgmise seaduse kohaselt: $P(p) = -15p^2 + 3000p - 5000$. Kasutades diferentseerimist leida, kui palju muutub kasum, kui hinna 60 kr juures tõsta hinda 1 kr võrra?

1.25 Oletame, et t tunniga õpib inimene selgeks N võõrkeelset fraasi, kusjuures N sõltub vahemikus $0 \leq t \leq 6$ tundide arvust järgmiselt: $N(t) = 12t - t^2$. Leida

- a) keskmine omandamise kiirus 2-st 5-nda tunnini;
- b) omandamise kiirus 2. tunnil.

1.26 Firma kogukulu koos on $C(q) = 0,5q^2 + 150q + 1000$ krooni, kus q on tootmismah. Praegu on tootmismah 150 ühikut koos. Leida, kui kiiresti muutub tootmismahu suurenedes

- a) kogukulu koos;
- b) kulu ühiku kohta.

1.27 *) Näidata, et tootmismahu muutudes kulude muutumise kiirus ei sõltu püsikuludest.

1.28 *) Näidata, et lineaarse kulufunktsiooni korral keskmine kulu ühiku kohta väheneb tootmismahu suurenedes ja vähenemine on võrdeline püsikuludega ning pöördvõrdeline tootmismahu ruuduga.

1.29 Oletame, et üliõpilane õpib t tunni jooksul selgeks n punkti, kusjuures $n = 40\sqrt{t}$, $0 \leq t \leq 10$. Leida

- a) keskmine omandamise kiirus vahemikus 4-st 9-nda tunnini;
- b) omandamise kiirus 4. tunnil.

1.30 Eesti pangandussektorit kajastavate mõningate näitajate ajafunktsioonide aastatel 1993-1994 võib kirjeldada üldisel kujul logaritmilise kasvu mudeliga: $y = a \ln(t) + c$, kus a ja c on parameetrid ning t aeg kvartalites (1993.a. I kv.-s $t = 1$). Käibel oleva sularaha korral (y on milj. kr) on mudeli parameetrid järgmised: $a = 849,85$ ja $c = 1152,3$. Leida mudeli põhjal

- a) kuidas sularaha hulga muutumise kiirus sõltub ajast;
b) sularaha hulga muutumise kiirus 1995. a. I kvartalis.

Funktsiooni diferentsiaal ja ligikaudne muutus.

Olgu meil funktsioon $y = y(x)$. Argumendi x **diferentsiaali** ehk lõpmata väikest muutu tähistatakse dx . Funktsiooni y lõpmata väike muut ehk **funktsiooni diferentsiaal** dy avaldatakse tuletise valemist:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'(x) dx$$

Seega funktsiooni diferentsiaal on funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutis. Analoog liikumisega: teepikkuse s muut on võrdne kiiruse v ja aja t muudu korrutisega: $\Delta s = v(t) \Delta t$.

NÄIDE 1.8. Funktsiooni diferentsiaali leidmine

Leida funktsiooni $y = 2x^2 + 5x + 3$ diferentsiaal.

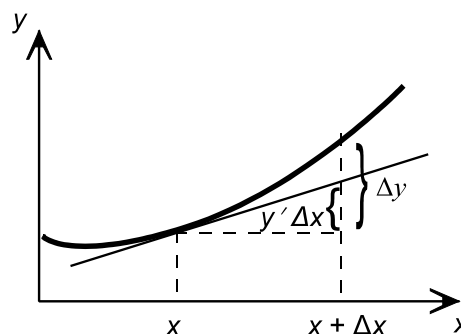
Lahendus

$$y' = 4x + 5 \\ dy = (4x + 5) dx$$

Funktsiooni diferentsiaali kasutatakse funktsiooni muudu ligikaudseks leidmiseks. Läheme üle lõplikele muutudele, s.t. asendame suurused dx ja dy suurustega Δx ja Δy . Võrdus muutub siis ligikaudseks.

Kui $y = f(x)$, ja argumendi x muutus on Δx , siis funktsiooni y muutuse Δy **ligikaudne väärtus** on leitav funktsiooni tuletise kaudu:

$$\Delta y \approx y'(x) \Delta x$$



Joonis 16

Väikeste argumendi x muutude Δx korral on suvalise funktsiooni y muut Δy võrdeline argumendi muuduga. Võrdeteguriks on funktsiooni tuletis antud kohal.

Arvestades, et $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, saame lineaarse avaldise funktsiooni y väärtuse ligikaudseks arvutamiseks (peale argumendi muutust suuruse Δx võrra):

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) \Delta x$$

Toodud avaldist nimetatakse ka **I järku Taylori valemiks**.

NÄIDE 1.9. Funktsiooni ligikaudne muutus.

Firma kogukulu (kroonides) q tooteühiku tootmisel avaldub järgmiselt: $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Praegune tootmismah on 50 toodet. Kui palju ligikaudu suureneb kogukulu tootmismahu suurenedes 2 ühiku võrra?

$$q = 50 \\ \Delta q = 2$$

$$\Delta C \approx C'(50) \Delta q = C'(50) \cdot 2 \\ C'(q) = 6q + 5 \\ C'(50) = 6 \cdot 50 + 5 = 305 \\ \Delta C \approx 305 \cdot 2 = 610$$

Vastus: Tootmismahu suurenedes 50 ühikult 52-le suurenevad kulud ligikaudu 610 kr.

Funktsiooni y **suhtelise muutuse** ligikaudne väärtus avaldub järgmiselt:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{y'(x) \Delta x}{y(x)}$$

NÄIDE 1.10. Funktsiooni suhteline muutus.

Riigi A sisemajanduse kogutoodang S muutub t aastat peale 1990. aastat järgmise seaduspärasuse järgi : $S(t) = t^2 + 5t + 200$ (miljardit dollarit). Prognoosida, mitu protsenti suureneb sisemajanduse kogutoodang 1998.a. I kvartalis.

$$\begin{aligned} t &= 8 \\ \Delta t &= 0,25 \\ \frac{\Delta S}{S} &\approx \frac{S'(8) 0,25}{S(8)} \\ S'(t) &= 2t + 5 \\ \frac{\Delta S}{S} &\approx \frac{(2 \cdot 8 + 5) 0,25}{8^2 + 5 \cdot 8 + 200} \approx 0,0173 = 1,73\% \end{aligned}$$

Vastus: 1998.a. I kvartalis suureneb sisemajanduse kogutoodang ligikaudu 1,73%.

NÄIDE 1.11. Funktsiooni suhteline muutus.

Olgu firma X päevane kogutoodang $q(K, L) = 500 K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$, kus K on investeeritud kapital ja L kulutatavate töötundide arv päevas. Leiame, mitu protsenti suureneb päevane kogutoodang, kui kapitalimahutusi suurendada 5%. ja töötundide arv jääb samaks.

Lahendus:

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0,05 K \\ \frac{\Delta q}{q} &\approx \frac{q'(K, L) \Delta K}{q(K, L)} \\ q'(K, L) &= 250 K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\Delta q}{q} &\approx \frac{250 K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} 0,05 K}{500 K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{250 \cdot 0,05}{500} = 0,025 \end{aligned}$$

Vastus: Kapitali suurendamisel 5% suureneb päevane kogutoodang ligikaudu 2,5%.

ÜLESANDED

1.31 Leia järgmiste funktsioonide diferentsiaal

a) $y = 4x^2 + 8x + 2$

b) $y = \frac{2}{x^3}$

c) $y = 3x^2 + 5 \ln x$

1.32 Firma päevane kogutoodang on $q(L) = 900 \sqrt[3]{L}$ ühikut, kus suurus L tähistab kõigi töötajate poolt summaarselt töötatud töötundide arvu päevas. Iga päev kulutatakse tootmiseks 1000 töötundi. Kui palju on vaja suurendada töötundide arvu, et kogutoodang suureneks 150 ühiku võrra.

1.33 Firma päevane kogukulu q toote tootmisel on $C(q) = \frac{1}{4}q^3 + 300q + 200$ krooni. Praegune tootmistase on 80 toodet päevas. Kui palju peaks tootmist vähendama, et kogukulu väheneks 50 000 kr võrra?

1.34 Töö efektiivsuse uurimisel on leitud, et kui töötaja tuleb tööle kell 8.00, siis t tunni pärast paneb ta kokku $n(t) = -t^3 + 10t^2 + 45t$ toodet. Leida, ligikaudu mitu toodet paneb töötaja kokku ajavahemikus 9.00 kuni 9.15.

1.35 *) Teades, et $\sqrt{16} = 4$, leida suuruse $\sqrt{16,5}$ ligikaudne väärtus.

1.36 Firma päevane kogutoodang on $q(L) = 60000 \sqrt[3]{L}$, kus L tähistab firmas kulutatavate töötundide arvu päevas. Praegu kulutatakse päevas 1000 töötundi. Leida ligikaudne kogutoodang päevas, kui töötundide arv väheneb 940-ni.

1.37 Firma loodi 1990.a. algul. Peale loomist on firma aastane puhaskasum (tuh. dollarites) muutunud järgmiselt:

$A(t) = 0,1t^2 + 10t + 20$, kus t on firma loomisest möödunud aastate arv. Prognoosida, mitu protsenti muutub puhaskasum 1997.a. IV kvartalis.

1.38 Firma päevane kogutoodang on $q(K) = 4000 \sqrt{K}$ ühikut, kus K on investeeritud kapital. Prognoosida, ligikaudu mitu protsenti suureneb kogutoodang investeringute suurenemisel 1% võrra.

1.39 Firma päevane kogutoodang on $q(K, L) = 600 \sqrt{K} \sqrt[3]{L}$ ühikut, kus K on investeeritud kapital ja L tööjõud. Prognoosida, ligikaudu mitu protsenti suureneb kogutoodang, kui tööjõu hulk suureneb 2% ja investeeritud kapital jääb konstantseks.

Piirsuurused. Marginaalanalüüs

Majandusanalüüsis kasutatakse tihti keskmisi suurusid: keskmine omahind, keskmine tulu, keskmine tootlikkus jne. Kuid tootmise planeerimisel on tihti vaja teada, kui palju suurenevad näiteks kulud, kui suurendame tootmismahu või kui palju muutub tootmismahut, kui suurendame kapitalimahutusi. Sellisel juhul keskmiste kasutamine vastust ei anna, tuleb uurida vajalike suuruste muutusi.

Marginaalanalüüs (piirväärtusanalüüs, *marginal analysis*) on analüüs, mis uurib funktsiooni muutumist argumenti ühikulise muutuse korral.

Piirkulu (*marginal cost*) MC - lisakulu 1 täiendava tooteühiku tootmisel

Piirtulu (*marginal revenue*) MR - lisatulu 1 täiendava tooteühiku müümisel

Olgu q tootmismahut, $C(q)$ kogukulu ja $R(q)$ kogutulu. Suurendame tootmismahu ühe ühiku võrra, $\Delta q = 1$, ja leiame kogukulu ning kogutulu muutused:

$$MC = C(q+1) - C(q) = \Delta C$$

$$MR = R(q+1) - R(q) = \Delta R$$

Arvestades, et funktsiooni muudu võib leida funktsiooni tuletise kaudu:

$$\Delta C \approx C'(q) \cdot \Delta q = C'(q) \cdot 1 = C'(q)$$

$$\Delta R \approx R'(q) \cdot \Delta q = R'(q) \cdot 1 = R'(q)$$

Saame, et piirkulu on võrdne kulufunktsiooni tuletisega ja piirtulu võrdne tulufunktsiooni tuletisega.

<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">piirkulu</div> <div style="text-align: center;">$MC = C'(q)$</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">piirtulu</div> <div style="text-align: center;">$MR = R'(q)$</div> </div>

Lisaks kasutatakse majanduses ka suurusi piirkasum, piirtoodang, piirkasulikkus, mis analoogselt on võrdsed vastavate suuruste (kasum, kogutoodang, kasulikkus) tuletistega.

ÜLESANDED

1.40 Firma kogukulu q ühiku tootmisel on $C(q) = \frac{1}{8}q^2 + 3q + 98$ krooni. Nõudlusfunktsioon on $p(q) = \frac{1}{3}(75 - q)$, kus p

tähistab ühe toote hinda kroonides.

- a) leida piirkulu ja piirtulu;
- b) kasutades piirkulu leida 9-nda toote tegemiseks tehtavad ligikaudsed kulud;
- c) kasutades piirtulu leida 9-nda toote müümisel saadav ligikaudne tulu.

1.41 *) Näidata, et suvalise kulufunktsiooni korral piirkulu ei sõltu püsikulust.

1.42 Leida piirtulu avaldis, kui hinna p korral müüakse $-0,6p + 6000$ toodet.

1.43 Keskmine kulu ühiku kohta on $AC(q) = 0,02q + 75 + \frac{5000}{q}$, kus q on tootmismahut. Leida piirkulu avaldis.

1.44 Firma X jaoks on teada järgmist

- püsikulu on 2000 krooni;
- piirkulu on $MC = 300$;
- piirtulu on $MR = 500 - 4q$

Leida firma kulufunktsioon, tulufunktsioon ja kasumifunktsioon. Näpunäide: tuleb leida selline kulufunktsioon ja tulufunktsioon, mille piirsuurused vastavad etteantud avaldistele.

1.45 *) Leida piirtulu avaldis lineaarse nõudlusfunktsiooni korral.

Liitfunktsiooni tuletis

Keerulisemate funktsioonide, nagu $y = \sqrt{3x^2 + 5}$, e^{3x} , $(\ln x)^3$ diferentseerimisel ei saa otse kasutada eespool toodud valemeid. Nende valemite kasutamiseks tuleb keerulised funktsioonid “lahti lõhkuda”, see tähendab esitada need liitfunktsioonina elementaarsematest funktsioonidest.

Näiteks funktsiooni $y = \sqrt{3x^2 + 5}$ võib esitada kujul

$$y(u) = \sqrt{u}, \quad \text{kus} \quad u(x) = 3x^2 + 5$$

Seejärel kasutatakse liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit

Kui $y=f(u)$ ja $u=f(x)$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Eespool toodud liitfunktsiooni korral

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{ja} \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

Nüüd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} 6x = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 5}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 5}}$$

Funktsiooni $y(x) = e^{3x}$ saab esitada liitfunktsioonina järgmiselt:

$$y(u) = e^u, \quad u(x) = 3x$$

Vastavad tuletised

$$\frac{dy}{du} = e^u, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3 = 3e^{3x}$$

Praktikas ei kirjutata vaheetappe välja, arvutatakse lühemalt

$$((\ln x)^3)' = 3(\ln x)^2 \cdot (\ln x)' = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x} = \frac{3(\ln x)^2}{x}$$

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli meeldejätmiseks pane tähele, et paremal pool võime diferentsiaali du ära taandada ja saame samasuse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \frac{\cancel{du}}{dx}$$

Tootmissisendi piirtulu on lisatulu, mis saadakse tootmissisendi ühe lisaühiku kasutamisest ning valmistatud lisatoodangu müügist. Tootmissisendiks võib olla näiteks tööjõud. Siis lisatulu, mis saadakse, kui võetakse tööle üks inimene rohkem, on **tööjõu piirtulu**.

NÄIDE 1.12. Tööjõu piirtulu

Ettevõtja on kindlaks teinud, et L töötajat toodavad päevas q ühikut ja

$$q(L) = 3L^2 + 5L$$

Kui nõudlusfunktsioon on $p(q) = \frac{7000}{q+200}$, kus p on hind, leida tööjõu piirtulu, kui töötajate arv $L=8$.

Lahendus:

Tulufunktsioon

$$R = pq = \frac{7000}{q+200} \cdot q = \frac{7000q}{q+200}$$

Meil on seega tulu sõltuvus kogusest $R(q)$ ja koguse sõltuvus töötajate arvust $q(L)$. Tööjõu piirtulu

$$MRL = \frac{dR}{dL}$$

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli järgi

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dR}{dq} \cdot \frac{dq}{dL}$$

Esimene tegur on piirtulu, $\frac{dR}{dq} \equiv MR$. Leiame selle, kasutades jagatise tuletist:

$$\frac{dR}{dq} = \frac{7000 \cdot (q+200) - 7000q \cdot 1}{(q+200)^2} = \frac{1\,400\,000}{(q+200)^2}$$

Kui töötajate arv $L=8$, siis vastav toodanguhulk

$$q(8) = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 = 232$$

Sellele toodanguhulgale vastav piirtulu

$$\left. \frac{dR}{dq} \right|_{q=232} = \frac{1\,400\,000}{(232+200)^2} \approx 7,5$$

Teine tegur $\frac{dq}{dL}$ näitab, kui palju suureneb toodang, kui võtta tööle üks töötaja rohkem. See on tööjõu piirtootlikkus:

$$\frac{dq}{dL} = \frac{d}{dL}(3L^2 + 5L) = 6L + 5$$

Kui töötajate arv on 8, siis

$$\left. \frac{dq}{dL} \right|_{L=8} = 6 \cdot 8 + 5 = 53$$

Lisatöötaja (ühiksanda) tööle võtmine suurendab toodangumahtu 53 ühiku võrra. Lisatöötaja töölevõtmisest saadav lisatulu

$$\left. \frac{dR}{dL} \right|_{L=8} = 7,5 \cdot 53 = 397,5$$

See on maksimaalne päevapalk (koos maksudega), mida võib sellele uuele töötajale maksta. Kui maksta rohkem, siis lisatöötaja palkamisest tingitud lisakulu on suurem ja kasum väheneb.

ÜLESANDED

1.46 Leida funktsiooni tuletis

a) $f(x) = (2x^4 - x)^3$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

c) $f(x) = \frac{1}{(2x + 3)^5}$

d) $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$

e) $f(x) = e^{x^2}$

f) $f(x) = \ln(5x)$

g) $f(x) = (2x^2 - 3x - 1)^{-\frac{10}{3}}$

h) $f(x) = 2\sqrt[5]{(x^3 + 1)^2}$

i) $f(x) = x^2(x - 4)^5$

j) $f(x) = \left(\frac{x-7}{x+4}\right)^{10}$

k) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

l) $f(x) = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5}$

1.47 Aastatel 1995-1996 oli nõudmiseni deposiitide (elanike ja ettevõtete hoiused) kasv Eestis eksponentsiaalne, $DEPN(t) = ae^{rt}$ milj. kr, kus parameetrid $a = 3087,7$ ja $r = 0,0289$ ning t on aeg kuudes ($t = 1$ 1995. a. jaanuaris).a) Leida, kuidas $DEPN$ kasvu kiirus sõltub ajast.

b) Prognoosida nõudmiseni deposiitide kasvamise kiirust 1997. a. juunis.

1.48 Kohvi maaletooja hindab, et kohalikul turul ostetakse kohvi ligikaudu $q(p) = \frac{43 \cdot 10^6}{p^2}$ kilo nädalas, kus p on kohvi hind..Prognoosi järgi on t nädala pärast kohvi hinnaks $p(t) = 0,02t^2 + 0,1t + 120$. Leida, kui kiiresti kohvi nõudlus muutub 10 nädala pärast.1.49 Sotsiaalabiks tehtavate kulutuste kasvu piirkonnas A võib kirjeldada mudeliga $y = \sqrt{\ln(3t + 2)}$, kus y on kulutused miljonites kroonides ja t on aastast 1990 möödunud aastate arv. Leida ligikaudu, mitu protsenti muutusid kulutused sotsiaalabile aastal 1995.1.50 Olgu nõudlusfunktsioon $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$, kus p on hind ja q kogus. Leida

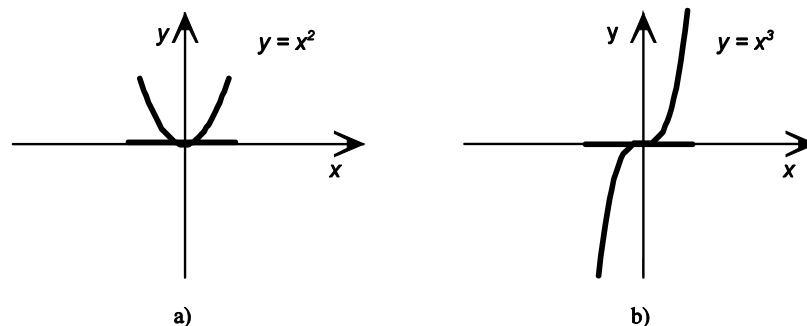
a) hinna muutumise kiirus koguse suhtes;

b) piirtulu avaldis.

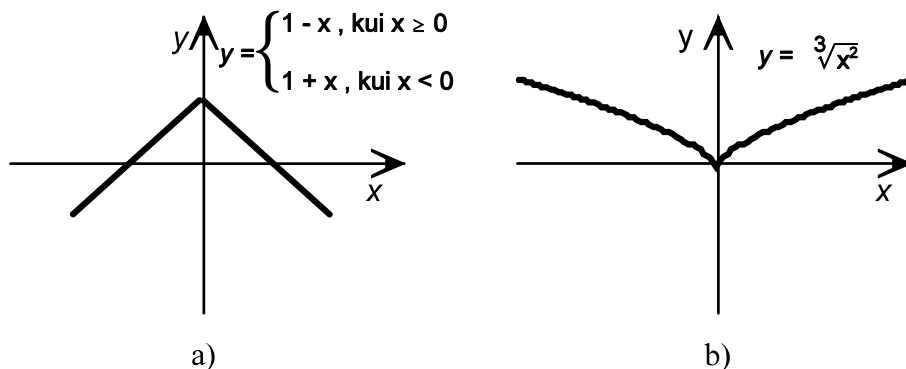
1.51 Leida, kui kiiresti muutub lõppkapital aastase intressimäära r suhtes liitintressi korral, kui intressi lisatakse iga kuu, algkapital on 10000 krooni ja lõppkapitali väärtust soovime leida 10 aasta pärast.Lokaalsed ekstreemumid.

Kasumi graafiku uurimisel nägime, et punktis, kus kasum on maksimaalne, on graafiku puutuja tõus null, puutuja on horisontaalne. Sellele punktile vastavat hinda nimetati optimaalseks hinnaks ja selle hinna korral oli kasumi tuletis null (joonis 10).

Üldiselt aga mitte igas punktis, kus tuletis on null ja puutuja horisontaalne, pole tegemist maksimumi või miinimumiga.

Joonisel 18 on toodud kaks funktsiooni, mille puutujad on horisontaalsed punktis $(0; 0)$. Funktsioonil $y = x^2$ on selles punktis miinimum, kuid funktsioonil $y = x^3$ pole seal ei miinimumi ega maksimumi.Joonis 18 Kaks funktsiooni, mille puutujad on horisontaalsed punktis $x = 0$.

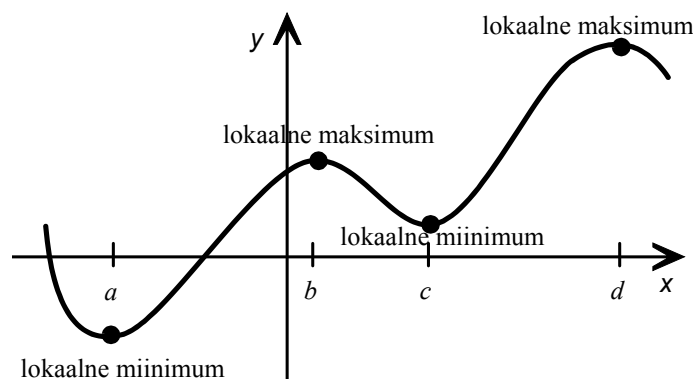
Teiselt poolt võib funktsioonil olla maksimum või miinimum punktis, kus tuletis pole määratud. Joonisel 19a) on toodud funktsioon, millel on punktis $(0; 1)$ maksimum, kuid tuletis määramata, puutuja puudub. Joonisel 19b) toodud funktsioonil on punktis $(0; 0)$ miinimum, kuid samuti tuletis puudub.



Joonis 19. Kaks funktsiooni, mille maksimum- või miinimumkohas on tuletis määramata.

Funktsioonil $y = f(x)$ on **lokaalne maksimum** kohal a , kui leidub punkti a ümbrus $U(a)$, nii et iga punkti $x \in U(a)$ korral $f(x) < f(a)$.
 Funktsioonil $y = f(x)$ on **lokaalne miinimum** kohal a , kui leidub punkti a ümbrus $U(a)$, nii et iga punkti $x \in U(a)$ korral $f(x) > f(a)$.

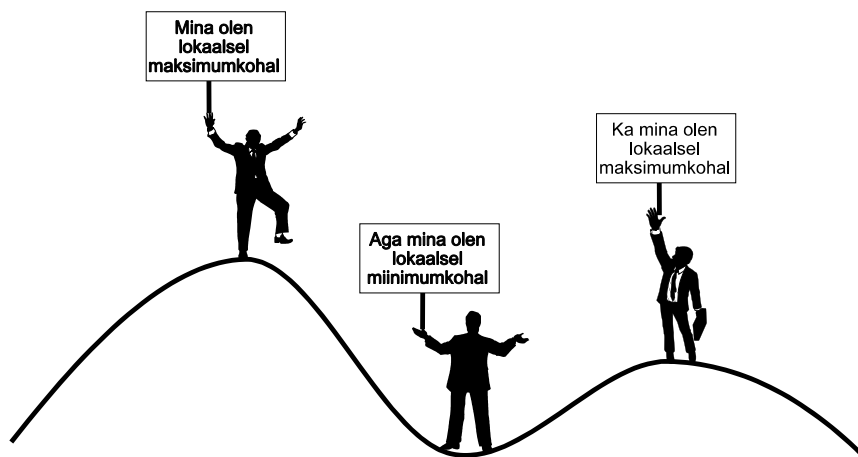
Funktsiooni lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse funktsiooni **lokaalseteks ekstreemumiteks** ja kohta, kus lokaalne ekstreemum saavutatakse, **lokaalseks ekstreemumkohaks**. Kasutatakse ka termineid **relatiivne maksimum** ja **relatiivne miinimum**.



Joonis 20. Lokaalsed maksimumid ja miinimumid.

Üldiselt võib funktsioonil olla lõpmata palju lokaalseid maksimume ja miinimume. Joonisel 20 toodud funktsiooni korral:

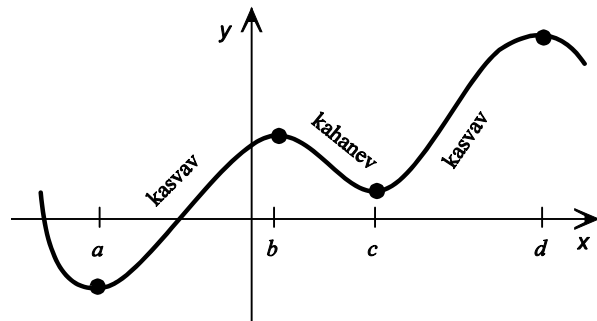
- ▶ lokaalsed maksimumid on $y(b)$ ja $y(d)$, punktid b ja d on lokaalsed maksimumkohad;
- ▶ lokaalsed miinimumid on $y(a)$ ja $y(c)$, punktid a ja c on lokaalsed miinimumkohad.



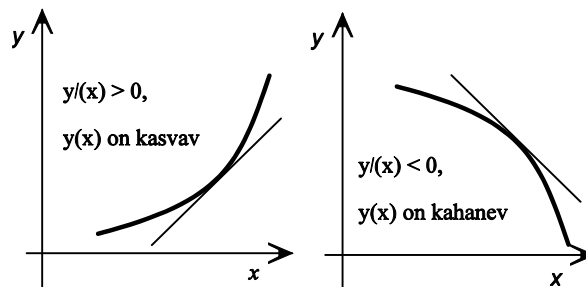
Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Funktsiooni nimetatakse **kasvavaks** mingis vahemikus K , kui suurematele argumenti x väärtustele selles vahemikus vastavad suuremad funktsiooni y väärtused: $x_1, x_2 \in K$ ja $x_2 > x_1$ korral $y(x_2) > y(x_1)$.

Funktsiooni nimetatakse **kahanevaks** mingis vahemikus K , kui suurematele argumenti x väärtustele selles vahemikus vastavad väiksemad funktsiooni y väärtused: $x_1, x_2 \in K$ ja $x_2 > x_1$ korral $y(x_2) < y(x_1)$.



Joonis 22. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.



Joonis 23. Funktsiooni I tuletise märk.

Joonisel 22 toodud funktsioon on

- ▶ kasvav vahemikes (a, b) ja (c, d)
- ▶ kahanev vahemikus (b, c) .

Kasvava funktsiooni puutuja tõus on positiivne, kahanemise korral on puutuja tõus negatiivne (joonis 23).

Funktsiooni muutumise kiirus on funktsiooni tuletis. Kasvamise korral on muutumise kiirus positiivne, seega tuletis on positiivne. Kahanemise korral on muutumise kiirus negatiivne ja tuletis seega negatiivne. Järelikult saab tuletist kasutada funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkondade leidmisel.

Kui $y'(x) > 0$ vahemikus (a, b) , siis y on kasvav selles vahemikus.
 Kui $y'(x) < 0$ vahemikus (a, b) , siis y on kahanev selles vahemikus.

Kasutatakse järgmisi tähistusi:

- ▶ funktsiooni $y(x)$ **kasvamispiirkond** $X\uparrow = \{x \in \mathbb{R} \mid y' > 0\}$;
- ▶ funktsiooni $y(x)$ **kahanemispiirkond** $X\downarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid y' < 0\}$.

NÄIDE 1.13. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonna leidmine

Leida funktsiooni $y(x) = x^2 - 8x$ kasvamis- ja kahanemispiirkond.

Lahendus: Leiame funktsiooni tuletise: $y'(x) = 2x - 8$.

Kasvamispiirkond:

$$\begin{aligned} y'(x) &> 0 \\ 2x - 8 &> 0 \\ 2x &> 8 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Kahanemispiirkond:

$$\begin{aligned} y'(x) &< 0 \\ 2x - 8 &< 0 \\ 2x &< 8 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Vastus: $X\uparrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ ja $X\downarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

NÄIDE 1.14. Kasvamise või kahanemise määramine antud punktis

Kontrollida, kas funktsioon $y(x) = x^3 - 7x^2 + 6x - 2$ on kasvav või kahanev punktis $x = 4$.

Lahendus:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 14x + 6 \\ y'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 14 \cdot 4 + 6 = -2 \end{aligned}$$

Vastus: Punktis $x = 4$ on funktsioon kahanev.

ÜLESANDED

1.52 Määrata, kas funktsioon on punktides a ja b kasvav või kahanev:

- a) $y(x) = -2x^2 + 60x - 500$; $a = 10$ $b = 20$;
- b) $y(x) = 3x^3 - 7x^2 - 12x - 15$; $a = 0$; $b = 3$;
- c) $y(x) = \frac{15}{x} + 3x$ $a = 2$; $b = 6$.

1.53 Kulufunktsioon on $C(q) = 0,1q^2 + 30q + 5000$, kus q on tootmiskaht. Praegune tootmiskaht on 220 ühikut. Leida, kas tootmiskahtu suurendades keskmine kulu ühiku kohta suureneb või väheneb. Kas on kasulik tootmiskahtu tõsta?

1.54 Nõudlusfunktsioon on $p(q) = 500 - 20q$, kus p on hind kroonides ja q nõutav kogus. Praegu müüakse toodet hinnaga 300 kr. Leida, kas hinda suurendades kogutulu kasvab või kahaneb.

1.55 Kasumifunktsioon on $P(q) = -0,2q^2 + 50q - 3000$, kus q on tootmiskaht. Praegune tootmiskaht on 1500 ühikut. Kas kasumi suurendamiseks tuleks tootmiskahtu tõsta või langetada?

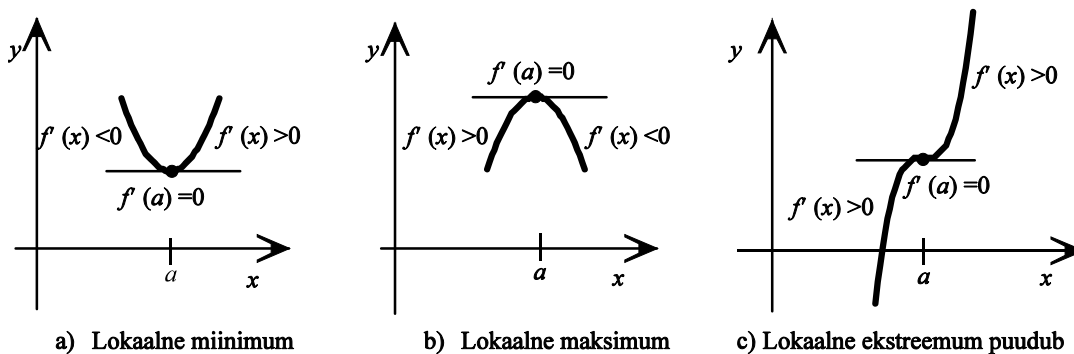
Lokaalsete ekstreemumite määramine. Tarvilik ja piisav tingimus

Punkti, mille korral funktsiooni I tuletis on null, nimetatakse **statsionaarseks punktiks**. Selles punktis funktsiooni muutumine "hetkeks seiskub".

Joonisel 24 on toodud kolm statsionaarset punkti:

- ▶ joonisel 24a) on funktsioonil statsionaarses punktis lokaalne miimum;
- ▶ joonisel 24b) on funktsioonil statsionaarses punktis lokaalne maksimum;
- ▶ joonisel 24c) pole funktsioonil statsionaarses punktis ei miimumi ega maksimumi.

Nagu näha joonistelt 24a) ja 24b), muudab funktsiooni I tuletis lokaalse miimumi ja maksimumi korral märki.



Joonis 24 Kolm statsionaarset punkti.

NÄIDE 1.15. Statsionaarsete punktide leidmine

Leida funktsiooni $y(x) = x^3 - 12x$ statsionaarsed punktid.

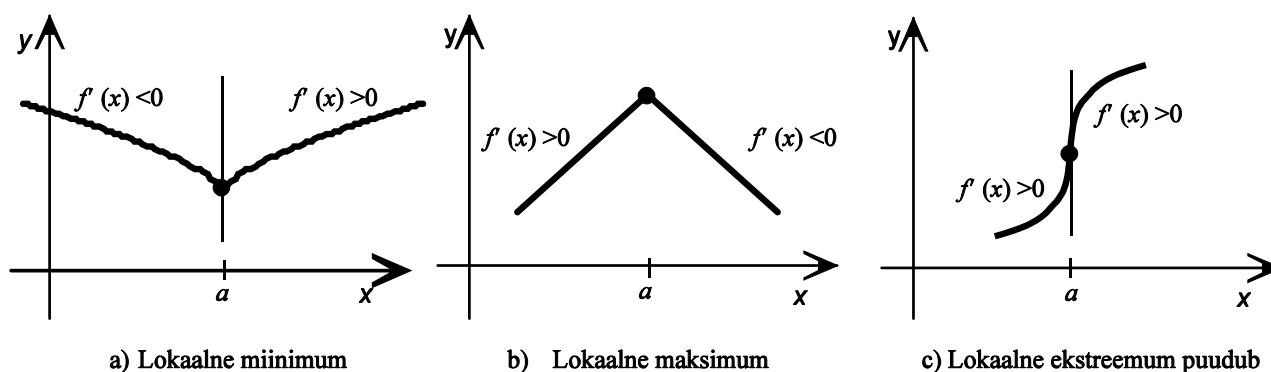
Lahendus:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= 3x^2 - 12 \\
 y'(x) &= 0 && \text{statsionaarse punkti tingimus} \\
 3x^2 - 12 &= 0 \\
 3x^2 &= 12 \\
 x^2 &= 4 \\
 x &= \pm 2
 \end{aligned}$$

Vastus: Funktsiooni $y(x) = x^3 - 12x$ statsionaarsed punktid on $x = -2$ ja $x = 2$.

Kolm funktsiooni, millel vaadeldavas punktis I tuletis on määramata, on toodud joonisel 25:

- ▶ joonisel 25 a) on punktis a puutuva vertikaalne ning puutuva tõus ja seega ka tuletis määramata, aga esineb lokaalne miinimum,
- ▶ joonisel 25 b) punktis a tuletis puudub, sest puutuva pole üheselt määratud, aga esineb lokaalne maksimum,
- ▶ joonisel 25c) on punktis a puutuva vertikaalne ning puutuva tõus ja seega ka tuletis määramata.



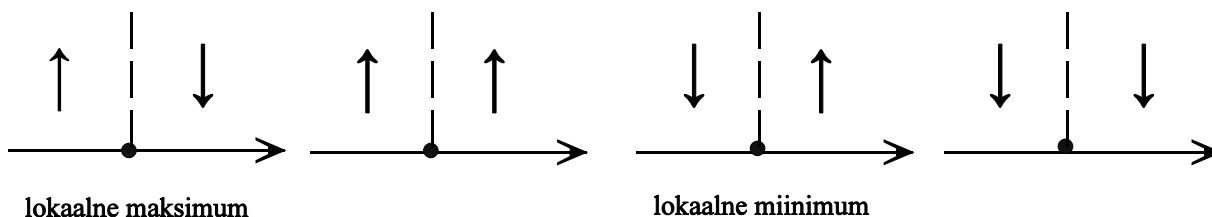
Joonis 25. Kolm kriitilist punkti, milles I tuletis on määramata

Funktsiooni **kriitiliseks punktiks** nimetatakse funktsiooni määramispiirkonna punkti, kus

- 1) I tuletis on null
või
- 2) I tuletis on määramata.

Lokaalne ekstreemum on alati kriitilises punktis, seega kriitilise punkti olemasolu on **tarvilik tingimus** lokaalse ekstreemumi jaoks. Kuid mitte igas kriitilises punktis pole funktsioonil lokaalset ekstreemumi, kriitilise punkti olemasolu pole piisav tingimus lokaalse ekstreemumi jaoks.

Joonistelt 24 a), b) ja 25 a), b) on näha, et lokaalse ekstreemumi korral funktsiooni I tuletis muudab märki: kasvamispiirkond läheb üle kahanemispirkonnaks või vastupidi. Kui aga mõlemal pool kriitilist punkti on I tuletise märk ühesugune [joonised 24 c) ja 25 c)], siis ei esine kriitilises punktis ekstreemumit.



Joonis 26 Lokaalsete ekstreemumite määramine kriitiliste punktide hulgast

Funktsiooni **lokaalse ekstreemumi piisav tingimus**:
 Kriitilises punktis on funktsioonil ekstreemum parajasti siis, kui funktsiooni kasvamine asendub selles punktis kahanemisega või vastupidi. Esimesel juhul on seal lokaalne maksimum, teisel juhul lokaalne miinimum.

NÄIDE 1.16. Kasvamis- ja kahanemispirkonna ning lokaalsete ekstreemumite määramine

Leida funktsiooni $y(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$ kasvamis- ja kahanemispirkond, lokaalsed ekstreemumid ja skitseerida graafik.

Lahendus: Tuletis on

$$y'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

Kriitiliste punktide leidmine. Esiteks leiame tuletise nullkohad.

$$12x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0$$

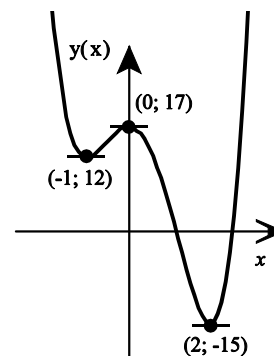
Ruutvõrrandi lahendamine annab, et $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Määramatuse kohad puuduvad (tuletis on määratud kogu reaalarvude hulgal), seega kriitilisi punkte on kolm:

- $x_1 = 0; \quad y(0) = 17 \quad (0; 17)$
- $x_2 = -1; \quad y(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 17 = 3 + 4 - 12 + 17 = 12 \quad (-1; 12)$
- $x_3 = 2; \quad y(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 17 = 48 - 32 - 48 + 17 = -15 \quad (2; -15)$

Kriitilised punktid jaotavad reaalarvude hulga piirkondadeks. Kasvamis- ja kahanemispirkondade määramiseks määrame tuletise märgi nendes piirkondades:

Piirkond	Tuletise märgi määramiseks arvutame $y'(x)$ mingis piirkonna punktis	
$x < -1$	$y'(-2) = -96 < 0$	Kahanemispirkond
$-1 < x < 0$	$y'(-0,5) = 7,5 > 0$	Kasvamispiirkond
$0 < x < 2$	$y'(1) = -24 < 0$	Kahanemispirkond
$2 < x$	$y'(3) = 144 > 0$	Kasvamispiirkond



Joonis 27

Punktides $(-1; 12)$ ja $(2; -15)$ on lokaalsed miinimumid, punktis $(0; 17)$ lokaalne maksimum (joonis 27).

NÄIDE 1.17. Kasvamis- ja kahanemiskiirkonna ning lokaalsete ekstreemumite määramine

Leida funktsiooni $y(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kasvamis- ja kahanemiskiirkond, lokaalsed ekstreemumid ja skitseerida graafik.

Lahendus: Leiame tuletise:

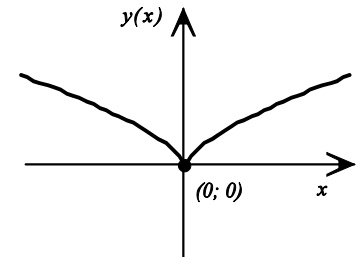
$$y'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Nullkohad tuletisel puuduvad. Punktis $x=0$ on aga nimetaja null ja tuletis määramata, see ongi ainuke kriitiline punkt:

$$x=0; \quad y(0)=0 \quad (0;0)$$

See kriitiline punkt jagab funktsiooni määramiskiirkonna kaheks:

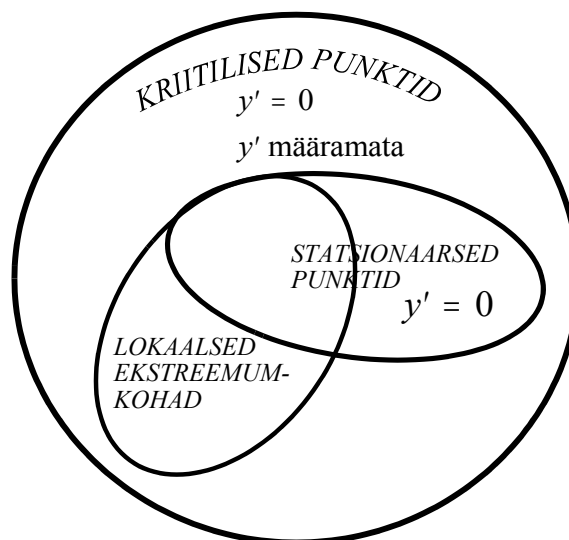
Piirkond	Tuletise märgi määramiseks arvutame $y'(x)$ mingis piirkonna punktis	
$x < 0$	$y'(-1) = -\frac{2}{3} < 0$	Kahanemiskiirkond
$x > 0$	$y'(1) = \frac{2}{3} > 0$	Kasvamispiirkond



Joonis 28

Punktis $(0; 0)$ on lokaalne miinimum (joonis 28).

Eespool oli toodud näiteid keerulisematest funktsioonidest ja nende uurimisest. Kui funktsiooni kuju on tuntud ja varem uuritud, võib piirduda lihtsama analüüsiga. Näiteks ruutpolünoomi $ax^2 + bx + c$ jaoks on teada, et sellel on üks lokaalne ekstreemum – miinimum, kui $a > 0$ (parabool avaneb ülespoole) ja maksimum, kui $a < 0$ (parabool avaneb allapoole).



ÜLESANDED

1.56 Leida funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkond, lokaalsed ekstreemumid ja skitseerida graafik:

a) $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 20;$

b) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 20x - 5.$

c) $y(x) = 10 - \sqrt[3]{x^2}.$

1.57 Kulufunktsioon avaldub ruutfunktsioonina kujul $C(q) = a_1q^2 + a_2q + C_F$, kus q on tootmiskaht ja C_F püsikulud.

Iseloomustada kogukulude muutumist ja leida keskmise kulu ekstreemumkoht, kui

a) $a_1 > 0;$

b) $a_1 < 0$.

1.58 Kulufunktsioon on $C(q) = 0,2q^2 + 50q + 2000$, kus q on tootmisaht. Praegune tootmisaht on 150 ühikut. Leida, kas tootmisahtu suurendades keskmine kulu ühiku kohta suureneb või väheneb.

1.59 Nõudlusfunktsioon on $p(q) = 10 - 0,2q$, kus p on hind kroonides ja q nõutav kogus. Praegu müüakse toodet hinnaga 3 kr tükk. Leida, kas hinda suurendades kogutulu kasvab või kahaneb.

1.60 Kontoritöö kulud käibe iga 1000 kr kohta sõltuvad kontoritöötajate arvust n järgmiselt:

$$C(n) = 2n^2 - 20n + 100.$$

Mitu töötajat peaks kontoris olema, et nende töö oleks kõige efektiivsem?

1.61 Firma kulufunktsioon on $C(q) = 0,5q^2 + 100000$, kus q on tootmisaht, ja toodet müüakse 600 kr tükk.

Leida mitu toodet tuleb müüa, et saada maksimaalset kasumit ja kui suur see on.

1.62 Firma kulufunktsioon on $C(q) = 120q + 35000$, kus q on tootmisaht, ja hinna sõltuvus kogusest $p(q) = 4000 - 10q$.

Leida maksimaalne kasum ja tootmisaht ning hind, mille korral saavutatakse maksimaalne kasum.

1.63 Kulude analüüsil tehti kindlaks, et püsikulud kuus on 50000 kr ja muutuvkulu ühiku kohta 2000 kr. Leida maksimaalne kasum ja tootmisaht ning hind mille korral saavutatakse maksimaalne kasum., kui nõudlusfunktsioon on

$$q(p) = -0,5p + 4000.$$

1.64 Kulude analüüsil tehti kindlaks, et püsikulud kuus on 2410 kr ja muutuvkulu ühiku kohta 14 kr. Leida maksimaalne kasum ja tootmisaht ning hind mille korral saavutatakse maksimaalne kasum., kui nõudlusfunktsioon on

$$q(p) = -2,5p + 315.$$

Funktsiooni kõrgemat järku tuletised.

Kui on antud diferentseeruv funktsioon $y = y(x)$, siis võime leida tuletise $y'(x)$. Sellest tuletisest saab leida jälle tuletist. Antud funktsiooni tuletise tuletist nimetatakse selle funktsiooni **teiseks tuletiseks** ehk **teist järku tuletiseks**:

$$y'' = (y')'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

NÄIDE 1.18. II tuletise leidmine

Leiame funktsiooni $y = x^3 - 5x$ teise tuletise.

Esimene tuletis $y' = 3x^2 - 5$. Selle funktsiooni teistkordsel diferentseerimisel saame teise tuletise $y'' = 6x$.

II järku tuletisest tuletise võtmisel saame kolmandat järku tuletise, $y''' = (y'')'$. Üldiselt võib leida funktsiooni **n-järku tuletise** $y^{(n)}$.

NÄIDE 1.19. Kõrgemat järku tuletiste leidmine

Olgu antud funktsioon $y(x) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2$. Leiame selle funktsiooni kuni 5-ndat järku tuletised:

$$y'(x) = 8x^3 + 15x^2 + 6x$$

$$y''(x) = 24x^2 + 30x + 6$$

$$y'''(x) = 48x + 30$$

$$y^{(4)}(x) = 48$$

$$y^{(5)}(x) = 0$$

II järku tuletise märkimiseks kasutatakse ka tähistust $\frac{d^2y}{dx^2}$, III järku tuletise märkimiseks $\frac{d^3y}{dx^3}$ ja n-järku tuletise märkimiseks $\frac{d^ny}{dx^n}$.

NÄIDE 1.20. Tootlikkus ja selle muutumise kiirus.

Ettevõtte tootmise analüüs on näidanud, et keskmine töötaja, kes tuleb tööle kell 8.00, on t tunni pärast jõudnud kokku panna $q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$ toodet.

a) Leida töötaja tootlikkus kell 11.00.

b) Kui kiiresti muutub töötaja tootlikkus kell 11.00?

c) Leida ligikaudu, kui palju muutub tootlikkus ajavahemikus 11.00 - 11.10.

d) Leida täpselt, kui palju muutub tootlikkus ajavahemikus 11.00 - 11.10.

Lahendus.

a) Tootlikkuse leiame kui ajaühikus toodetud toodete arvu, mis on toodangu muutumise kiirus ehk esimene tuletis:

$$t=3 \quad \begin{aligned} q'(t) &= -3t^2 + 12t + 24 \\ q'(3) &= -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 24 = 33 \end{aligned}$$

Vastus: Kell 11.00 on töötaja tootlikkus 33 toodet tunnis ($\frac{\text{toodet}}{h}$).

b) Tootlikkuse muutumise kiirus on toodangu teine tuletis:

$$t=3 \quad \begin{aligned} q''(t) &= -6t + 12 \\ q''(3) &= -6 \cdot 3 + 12 = -6 \end{aligned}$$

Vastus: Kell 11.00 on tootlikkuse muutumise kiirus $-6 \frac{\text{toodet}}{h^2}$. Kuna kiirus on negatiivne, siis tootlikkus väheneb, töötaja väsib.

c) Tootlikkuse muudu ligikaudselt arvutamiseks kasutame ligikaudse arvutamise valemit:

$$\begin{aligned} t=3 \quad \Delta q' &\approx q''(t) \Delta t \\ \Delta t = \frac{1}{6} \quad \Delta q' &\approx q''(3) \cdot \frac{1}{6} = -6 \cdot \frac{1}{6} = -1 \end{aligned}$$

Vastus: Vahemikus 11.00 - 11.10 on tootlikkuse vähenemine 1 ühik tunnis. Kui kell 11.00 oli tootlikkus 33 ühikut tunnis, siis 11.10 on tootlikkus vähenenud 32 ühikuni tunnis.

d) Tootlikkuse muudu täpselt leidmiseks leiame algul tootlikkuse kell 11.10 ja kell 11.00 ning siis nende vahe:

$$\begin{aligned} t_1 = 3 \quad \Delta q' &= q'(t_2) - q'(t_1) = q'\left(3\frac{1}{6}\right) - q'(3) = \\ t_2 = 3\frac{1}{6} \quad &= \left(-3 \cdot \left(\frac{19}{6}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{19}{6}\right) + 24\right) - (-3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 24) \approx 31,92 - 33 = -1,08 \end{aligned}$$

Vastus: Vahemikus 11.00 - 11.10 on tootlikkuse tegelik vähenemine 1,08 ühikut tunnis.

ÜLESANDED

1.65 Leida II tuletis.

a) $f(x) = 5x^{10} - 6x^5 - 27x + 4$;

b) $f(x) = 12x^2 - 3x$;

c) $y = x$;

d) $y = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$;

e) $f(x) = \frac{3x^3}{5\sqrt{x}} + 12\sqrt[3]{x^5}$.

1.66 Leida funktsiooni kõik tuletised kuni esimese nulliga võrduva tuletiseni.

a) $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 7$;

b) $y = (4x - 7)(9x + 2)$;

1.67 Ettevõtte tootmise analüüs on näidanud, et keskmine töötaja, kes tuleb tööle kell 8.00, on t tunni pärast jõudnud kokku panna $q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ toodet.

a) Leida töötaja tootlikkus kell 9.00.

b) Kui kiiresti muutub töötaja tootlikkus kell 9.00?

c) Leida ligikaudu, kui palju muutub tootlikkus ajavahemikus 9.00 - 9.15.

d) Leida täpselt, kui palju muutub tootlikkus ajavahemikus 9.00 - 9.15.

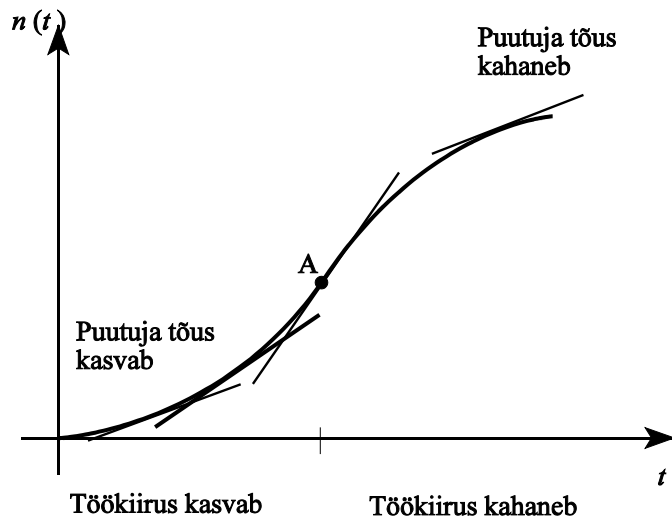
1.68 Analüüs näitab, et t kuu pärast on teatud majandusharus tootetühiku keskmine hind $p(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300$ krooni.

a) Kui suur on hinna muutumise kiirus 5 kuu pärast?

b) Kui kiiresti muutub hinna muutumise kiirus 5 kuu pärast?

Funktsiooni kumerus, nõgusus ja käänupunktid.

Kassapidaja poolt teenindatud ostjate arv n sõltub ajast t tavaliselt nii, nagu on toodud joonisel 30 ($t = 0$ tööpäeva algul). Teenindatud ostjate arv kogu aeg kasvab. Kuid kasvamine on erinevates piirkondades erinev. Algul graafik tõuseb aeglaselt, töökiirus on väike. Tasapisi saab kassapidaja hoo sisse, töökiirus kasvab. Punktis A on töökiirus kõige suurem, graafiku tõus kõige suurem. Seejärel hakkab tunda andma väsimus ning tõus hakkab vähenema, töökiirus kahaneb.



Peale kasvamise ja kahanemise iseloomustavad funktsiooni graafikut **kumerus** ja **nõgusus**.

Joonis 30. Teenindatud ostjate arvu muutumine ajas.

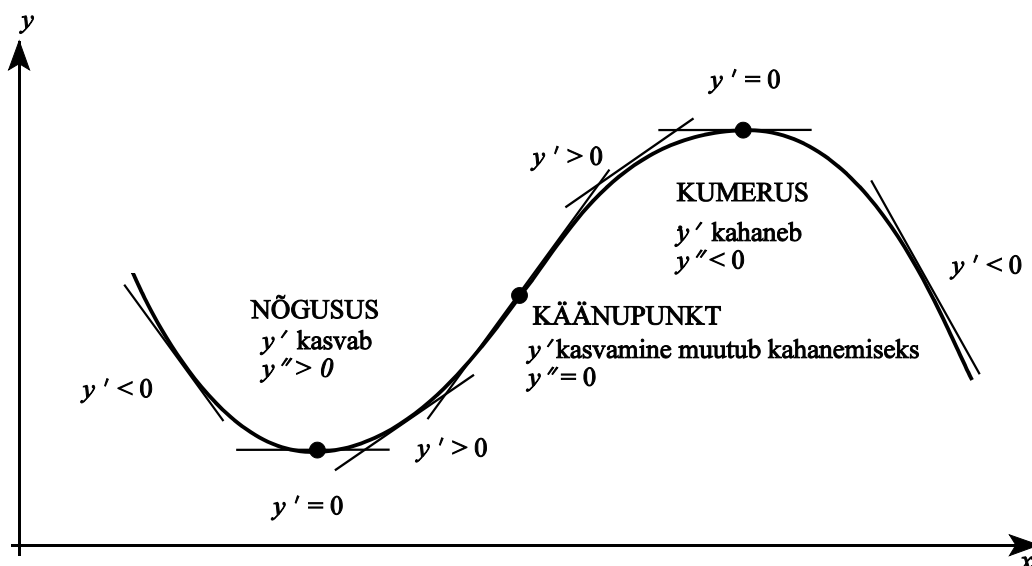
Funktsioon $y=f(x)$ on mingis piirkonnas U **kumer**, kui funktsiooni graafiku puutuja asub ülalpool graafikut, ja **nõgus**, kui funktsiooni graafiku puutuja asub allpool graafikut iga punkti korral piirkonnas U.

Kasutatakse järgmisi tähistusi

- ▶ funktsiooni $y(x)$ **kumeruspiirkond** $\hat{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid y'' < 0\}$.
- ▶ funktsiooni $y(x)$ **nõgususpiirkond** $\hat{X}^t = \{x \in \mathbb{R} \mid y'' > 0\}$;

Funktsiooni graafiku punkti, milles funktsiooni kumerus läheb üle nõgususeks või vastupidi, nimetatakse funktsiooni **käänupunktiks**.

Vaatame joonist 31. Kui funktsioon on kumer, siis funktsiooni muutumise kiirus (I tuletis) kahaneb, kiiruse muutumise kiirus (II tuletis) on negatiivne. Kui funktsioon on nõgus, siis muutumise kiirus (I tuletis) kasvab, kiiruse muutumise kiirus (II tuletis) on positiivne.



Joonis 31 Kumerus, nõgusus ja tuletised

Funktsioon $y = f(x)$ on mingis piirkonnas

- ▶ **kumer**, kui $f'(x)$ on kahanev selles piirkonnas, $f''(x) < 0$, ja
- ▶ **nõgus**, kui $f'(x)$ on kasvav selles piirkonnas, $f''(x) > 0$.

Funktsioonil $y = f(x)$ on kohal a **käänupunkt**, kui funktsiooni tuletisel $f'(x)$ on selles kohas lokaalne ekstreemum.

NÄIDE 1.21. Kumer või nõgus antud punktis

Kontrollida, kas funktsioon $y = -2x^3 + 4x^2 + 9x - 15$ on kumer või nõgus punktis $x = 3$.

Lahendus. Leiame funktsiooni teise tuletise märgi vastaval kohal:

$$y' = -6x^2 + 8x + 9$$

$$y'' = -12x + 8$$

$$y''(3) = -12 \cdot 3 + 8 = -28 < 0 \quad \text{kumer}$$

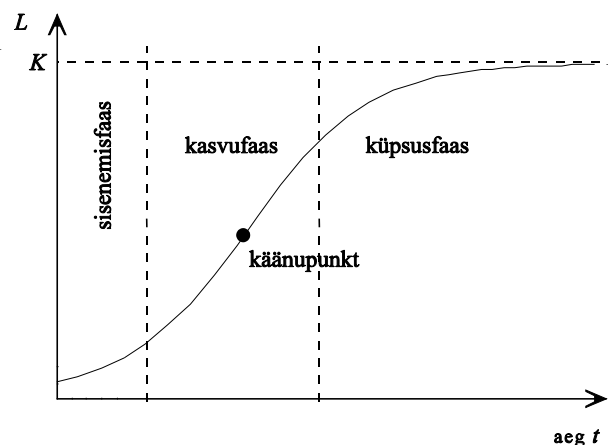
Müügi prognoosimisel kasutatakse mitmeid mudeleid, mis tulenevad difusiooniteooriast. Üheks mudeliks on **logistilise kasvu kõver**, mis kirjeldab konkreetse toote elutsükli¹. Logistilise mudeli korral sõltub läbimüüki L ajast t järgmiselt:

$$L(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}},$$

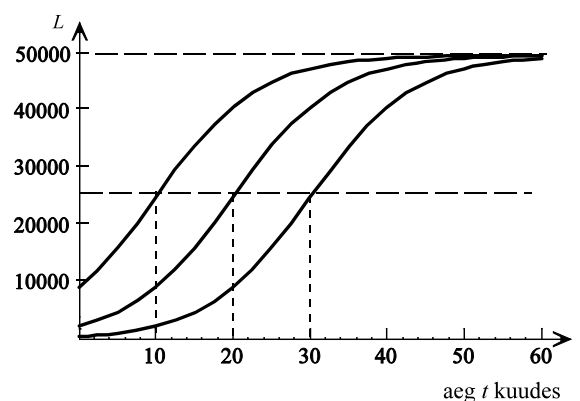
kus K , a ja r on mudeli parameetrid (määratakse igal konkreetsel juhul eraldi).

Turule sisenemise faasis (*introduction phase*) on kasv aeglane, seejärel saabub kasvufaas (*growth phase*), kus müügimaht kasvab kiiresti ning lõpuks jõuab kätte nõ küpsusfaas (*maturity phase*), millal läbimüügi kasv jätkub, ent kahaneva kiirusega (joon. 32). Logistilist kõverat iseloomustab turu mahutavus ehk küllastuvus K — kui palju on maksimaalselt võimalik seda toodet müüa. Parameeter r iseloomustab sisenemisfaasi pikkust (tavaliselt $0 < r < 1$).

Käänupunktis on läbimüügi kasv kõige kiirem ja selleks ajaks on saavutatud pool turu mahutavusest. Joonisel 33 on toodud erinevad logistilised kasvukõverad (erineva parameetri a väärtustega), kus käänupunkt saabub 10 kuud, 20 kuud ja 30 kuud peale müügi algust.

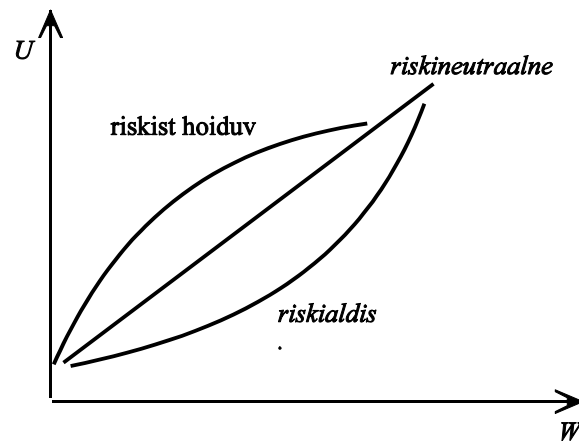


Joonis 32 Logistiline kasvukõver



Joonis 33 Erinevad logistilised kasvukõverad, käänupunkt saabub 10 kuud, 20 kuud ja 30 kuud peale müügi algust.

¹Morrison, J. "Life-Cycle Approach to New Product Model". The Journal of Business Forecasting, Summer 1995.



Joonis 34 Investori kasulikkusfunktsioon

Investori käitumisteoorias kasutatakse investori kasulikkusfunktsiooni U (*utility function*). Rikkuse W (*wealth*) suurenedes suureneb sellest saadav kasulikkus, järelikult kasulikkusfunktsioon on kasvav. Kumeruse järgi eristatakse kolme tüüpi investoreid (joonis 34)²:

- ▶ riskist hoiduv investor, $U''(W) < 0$, kumer;
- ▶ riskineutraalne investor, $U''(W) = 0$, sirge;
- ▶ riskialdis investor, $U''(W) > 0$, nõgus.

Absoluutne riskikartlikkus iseloomustab riskantsetesse aktivatesse paigutatud vahendite mahtu investori rikkuse muutudes. Seda mõõdetakse valemiga

$$A(W) = - \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Kui absoluutne riskikartlikkus suureneb, siis riskantsetesse aktsiatesse paigutatud aktive maht väheneb rikkuse suurenemisel.

ÜLESANDED

1.69 Leida järgmiste funktsioonide käänupunkt ning kumerus- ja nõgususpiirkond:

a) $y = 3x^2 - x^3$;

b) $y = x^{\frac{5}{3}}$;

c) $y = \ln(1 + x^2)$

1.70 Poes N uuriti, kuidas kliendi summaarse ostusumma suurus sõltub kliendikaardi omanise ajast. Selleks võeti välja 3068 kliendi poolt tehtud ostud ajavahemikul mai 19...7 kuni oktoober 19...7 (91081 ostu). Peale andmete statistilist töötlemist saadi mudel $S(t) = 0,01t^3 - 1,8664t^2 + 134,13t + 1144,6$, kus t on kliendikaardi omanise aeg päevades ja S selle aja jooksul tehtud ostude kogusumma kroonides. Leida

- a) ostusumma päevas klientidel, kes on kliendikaarti omanud 30 päeva ja kas päevane ostusumma kasvab või kahaneb;
- b) ostusumma päevas klientidel, kes on kliendikaarti omanud 100 päeva ja kas päevane ostusumma kasvab või kahaneb;
- c) millal hakkab ostusumma päevas kasvama?

1.71 Aastatel 1995-1996 kirjeldas nõudmiseni deposiitide kasvu Eestis mudel $DEPN(t) = 3087,7e^{0,0289t}$, kus t on aeg kuudes (jaanuar 1995 $t=1$) ja DEPN deposiidid miljonites kroonides. Kas deposiitide kasv kiirenes või aeglustus sellel ajavahemikul?

1.72 Kirjeldagu uue toote elutsükli logistiline mudel $L(t) = \frac{50}{1 + 5e^{-0,15t}}$, kus t on aeg kuudes ($t=1; 2; \dots$) ja L läbimüük (tuh.

tk).

- a) Leia summaarne (kumuleeruv) läbimüük ja läbimüük kuus 5 kuud peale müügi algust. Kas läbimüük kuus suureneb või väheneb?
- b) Leia summaarne (kumuleeruv) läbimüük ja läbimüük kuus 20 kuud peale müügi algust. Kas läbimüük kuus suureneb või väheneb?
- c) Mitmendal kuul on kuu läbimüük kõige suurem? Kui palju on selleks ajaks müüdud? Kui suure osa moodustab see maksimaalsest läbimüügist 50 tuh. tk?

²Sander, P. Portfelligiteooria. Tartu, TÜ, 1999.

1.73 Näidata, et logistilise mudeli $L(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}$ korral on käänupunkt kohas $t_k = \frac{\ln a}{r}$ ning et selleks ajaks on saavutatud pool küllastustasemest K .

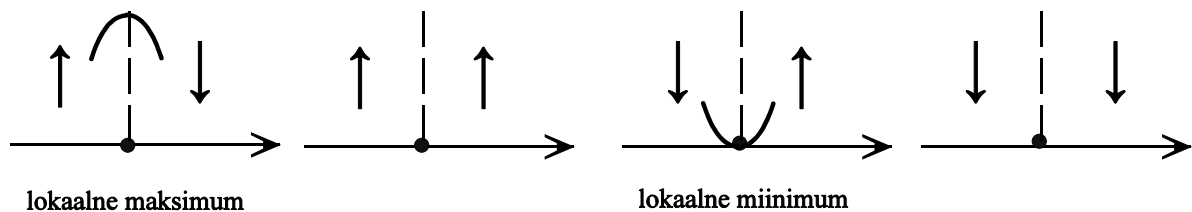
1.74 Olgu investori kasulikkusfunktsioon kujul $U(W) = W - kW^2$, kus W on rikkus ja k positiivne konstant. Näidata, et sellisel juhul rikkuse kasvades absoluutne riskikartlikkus $A(W)$ suureneb.

1.75 Olgu investori kasulikkusfunktsioon kujul $U(W) = c - e^{-kW}$, kus W on rikkus ning c ja k positiivsed konstandid. Näidata, et sellisel juhul rikkuse kasvades absoluutne riskikartlikkus $A(W)$ ei sõltu rikkusest.

1.76 Olgu investori kasulikkusfunktsioon kujul $U(W) = \ln W$, kus W on rikkus. Näidata, et sellisel juhul rikkuse kasvades absoluutne riskikartlikkus $A(W)$ väheneb rikkuse suurenedes.

Lokaalsete ekstreemumite määramine II tuletise abil.

Tuletame meelde, kuidas määrasime lokaalse maksimumi ja lokaalse miinimumi olemasolu. Uurisime, mida teeb funktsioon (kasvab või kahaneb) enne ja pärast kriitilist punkti.



Joonis 35 Lokaalsete ekstreemumite määramine kriitiliste punktide hulgest

Kui statsionaarne punkt asub kumeruspiirkonnas, on tegemist lokaalse maksimumiga, kui aga nõgususpiirkonnas, siis on tegemist lokaalse miinimumiga.

Statsionaarses punktis, kus $f'(x) = 0$, on funktsioonil

- ▶ lokaalne miinimum, kui $f''(x) > 0$;
- ▶ lokaalne maksimum, kui $f''(x) < 0$.

NÄIDE 1.22. Lokaalsete ekstreemumite leidmine

Leida funktsiooni $y = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 + 5$ lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus.

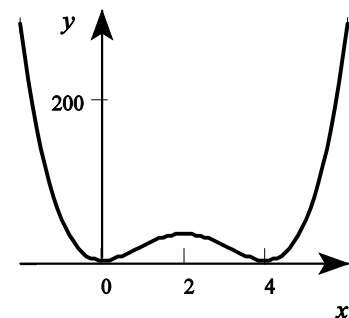
1. Määrame kriitilised kohad. Selleks leiame I tuletise ja selle nullkohad ning määramatuse kohad.

$$y'(x) = 8x^3 - 48x^2 + 64x$$

Määramatuse kohad puuduvad. Nullkohtade leidmiseks võrdsustame tuletise nulliga.

$$\begin{aligned} 8x^3 - 48x^2 + 64x &= 0 \\ 8x(x^2 - 6x + 8) &= 0 \\ x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 4 &\quad \text{kriitilised kohad} \end{aligned}$$

2. Leiame II tuletise väärtused kriitilistes kohtades.



Joonis 36

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= 24x^2 - 96x + 64 \\
 y''(0) &= 24 \cdot 0^2 - 96 \cdot 0 + 64 = 64 > 0 && \text{nõgus, lokaalne miinimum} \\
 y''(2) &= 24 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 64 = -32 < 0 && \text{kumer, lokaalne maksimum} \\
 y''(4) &= 24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 64 = 64 > 0 && \text{nõgus, lokaalne miinimum}
 \end{aligned}$$

Vastus: Uuritaval funktsioonil on lokaalsed miinimumid punktides $x=0$ ja $x=4$ ning lokaalne maksimum punktis $x=2$. (joonis 36)

Funktsiooni $y(x)$ **lokaalsete ekstreemumite määramiseks** II tuletise abil:

1. Leia funktsiooni I tuletis $y'(x)$.
2. Määra kriitilised kohad: I tuletise määramatuse kohad ja nullkohad x_1, x_2, \dots
3. Leia funktsiooni II tuletis $y''(x)$.
4. Leia funktsiooni II tuletise väärtused punktis 2 leitud kohtadel $y''(x_1), y''(x_2), \dots$
4. Kui

$$y''(x_i) > 0 \Rightarrow \text{nõgus, lokaalne miinimum;}$$

$$y''(x_i) < 0 \Rightarrow \text{kumer, lokaalne maksimum.}$$

ÜLESANDED

1.77 Prognoositakse, et teatud tõenäosusega on lähima kuu aja jooksul on oodata aktsia hinna muutumist järgmise seaduspärasuse järgi: $p(t) = -0,0035t^3 + 0,18t^2 - 2,5t + 152$, kus t on päevade arv alates praegusest.

a) Mitme päeva pärast on kasulik aktsiaid osta ja mitme päeva pärast on kasulik neid müüa?

b) Kui suurt tulu saadakse, kui ostmiseks sobival ajal ostetakse 1000 aktsiat, mis müümiseks sobival ajal maha müüakse.

1.78 Prognoos näitab, et kauba A pakutav kogus q muutub lähima 3 kuu jooksul järgmiselt: $q(t) = 0,04t^3 - 7t^2 + 200t + 15000$, kus t on päevade arv alates tänasest. Mitme päeva pärast on pakutav kogus saavutanud miinimumi?

Globaalsed ekstreemumid.

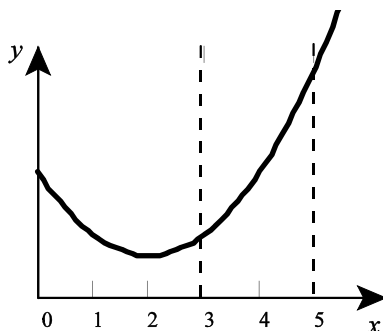
Funktsiooni **globaalne maksimum** mingis vahemikus on funktsiooni suurim väärtus antud vahemikus. Funktsiooni **globaalne miinimum** mingis vahemikus on funktsiooni vähim väärtus antud vahemikus.

Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse funktsiooni **globaalseteks ekstreemumiteks**.

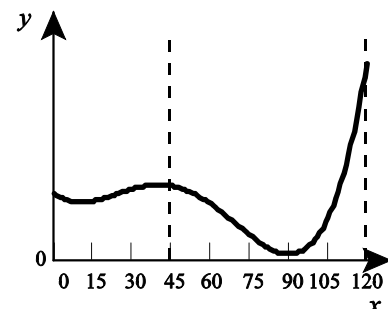
Kasutatakse ka termineid **absoluutne maksimum**, **absoluutne miinimum**.

Funktsiooni globaalne ekstreemum mingis vahemikus võib asuda:

- ▶ antud vahemikku sattuvas lokaalses ekstreemumkohas või
- ▶ antud vahemiku äärepunktis.



Joonis 37. Vahemikus $[0; 3]$ on globaalne miinimum punktis 2, vahemikus $[3; 5]$ on globaalne miinimum punktis 3.



Joonis 38 Vahemikus $[0; 45]$ on globaalne maksimum kohal 40 ja globaalne miinimum kohal 10. Vahemikus $[45; 120]$ on globaalne maksimum kohal 120 ja globaalne miinimum kohal 90.

Pideva funktsiooni $y(x)$ **globaalsete ekstreemumite leidmine** vahemikus $a \leq x \leq b$:

1. Leia funktsiooni lokaalsed ekstreemumid vahemikus $a \leq x \leq b$.
2. Leia funktsiooni $y(x)$ väärtused vahemiku äärepunktides a ja b .
3. Leitud väärtustest suurim on globaalne maksimum ja vähim globaalne miinimum antud vahemikus.

NÄIDE 1.23. Globaalne miinimum: minimaalsed kulud tooteühiku kohta

Olgu kulufunktsioon $C(q) = 2q^2 + 20q + 3000$. Leida minimaalsed kulud tooteühiku kohta, kui

- a) tootmismahd võib-olla kuni 20 ühikut;
- b) tootmismahd võib olla kuni 50 ühikut.

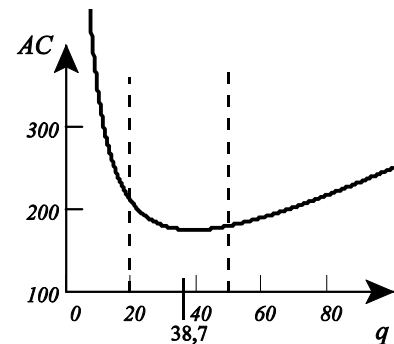
Lahendus

Leiame kulud tooteühiku kohta

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{2q^2 + 20q + 3000}{q} = 2q + 20 + \frac{3000}{q}$$

Tuleb leida selle funktsiooni globaalne miinimum antud vahemikes. Selleks algul leiame funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. Tuletise nullkohad:

$$\begin{aligned} AC'(q) &= 2 - \frac{3000}{q^2} \\ AC' &= 0 \\ 2 - \frac{3000}{q^2} &= 0 \\ \frac{3000}{q^2} &= 2 \\ q^2 &= 1500 \\ q &= \pm 38,7 \end{aligned}$$



Joonis 39 Kulud tooteühiku kohta.

a) Vahemikus 0 kuni 20 lokaalne ekstreemum puudub ja globaalne miinimum on järelikult vahemiku äärepunktis kohal 20. $AC(20) = 210$

b) Vahemikus 0 kuni 50 on lokaalne miinimum kohal 38,7. Kuna antud vahemikus rohkem kriitilisi punkte pole, siis funktsioon kasvab mõlemal pool seda kohta ja see ongi globaalne miinimum antud vahemikus. $AC(38,7) = 175$.

Vastus: Kui tootmismahd on kuni 20 ühikut, on minimaalsed kulud tooteühiku kohta 210. Kui tootmismahd on kuni 50 ühikut, on minimaalsed kulud tooteühiku kohta 175.

ÜLESANDED

1.79 On leitud firma kogukulu kuus: $C(q) = 0,01q^2 + 10q + 40000$ krooni, kus q on tootmismahd. Leida:

- a) kuidas 1 toote valmistamiseks tehtavad kulud sõltuvad tootmismahust;
- b) millised on minimaalsed kulud tooteühiku kohta, kui tootmismahd on kuni 5000 ühikut kuus;
- c) millised on minimaalsed kulud tooteühiku kohta, kui tootmismahd ei saa ületada 1500 ühikut kuus.

1.80 On antud firma kasumifunktsioon $P(q) = -2q^3 + 270q^2 - 4800q - 6000$, kus q on toodete arv tuhandetes ja kasum on kroonides. Leida firma maksimaalne kasum, kui

- a) tootmismahd võib olla kuni 100 tuh. toodet;
- b) tootmismahd ei või ületada 50 tuh. toodet.

1.81 Nõudlusfunktsioon on kujul $p(q) = 1000 - \frac{q}{200}$ krooni, kus q on nõutav kogus. Leida firma maksimaalne kogutulu ja hind

selle saavutamiseks

- a) kui firma tootmismahd võib olla kuni 200 000 ühikut;
- b) kui firma tootmismahd võib olla kuni 80 000 ühikut.

1.82 Elanike arvu muutumise prognoos järgmise 5 aasta peale annab tulemuseks, et elanike arvu muutust kirjeldab funktsioon: $N(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ (tuh.el.), kus t on aeg aastates alates praegusest.

- a) millal on järgmise 5 aasta jooksul elanike arvu kasv kõige kiirem?
- b) millal on järgmise 5 aasta jooksul elanike arvu kasv kõige aeglasem?

Optimeerimisülesanded.

Optimaalne on olemasolevate võimaluste (kitsenduste) ja püstitatud juhtimiseesmärgi korral saavutatav parim tulemus. **Optimaalsuskriteerium** on juhtimiseesmärgi kvantitatiivne hinnang. **Optimeerimine** on olemasolevatele kitsendustele ning püstitatud optimaalsuskriteeriumile vastava lahendi leidmine.

Etapid:

1. Tee kindlaks, millist suurust on vaja optimeerida, mis on funktsioon.
2. Tee kindlaks, millist suurust tuleb muuta, mis on argument.
3. Avalda funktsioon argumendi kaudu, s.t. leia matemaatiline avaldis, mis seob neid suurusi.
4. Kasutades ekstreemumite määramise tehnikat, optimeeri leitud funktsioon.

NÄIDE 1.24. Rentimine: tulude maksimeerimine.

Firmal Y on 50 autot ja neid renditakse välja nädala kaupa. Kogemus näitab, et kui nädalarent on 1000 kr, renditakse välja kõik autod. Summa tõstmisel 40 krooni võrra väheneb autode rentijate arv ühe võrra. Milline nädalarent annab firmale suurima kogutulu? Mitu autot siis välja renditakse?

Lahendus. Optimeerida tuleb kogutulu R ja argumendiks võetakse hind p . Kogutulu funktsioon on $R(p) = qp$, kus q on väljarenditud autode arv.

Leiame, kuidas väljarenditud autode arv sõltub hinnast $q = q(p)$:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1000 & q(p) &= ap + b \\ q_1 &= 50 & a &= \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-1}{40} = -0,025 \\ \Delta p &= 40 & b &= q_1 - ap_1 = 50 - (-0,025) \cdot 1000 = 75 \\ \Delta q &= -1 & q(p) &= -0,025p + 75 \quad \text{nõudlusfunktsioon} \end{aligned}$$

Leiame tulude sõltuvuse rendi suurusest:

$$R(p) = -0,025p^2 + 75p$$

Suurim kogutulu on funktsiooni maksimumpunktis. Seal $R'(p) = 0$ ja $R''(p) < 0$.

$$\begin{aligned} R'(p) &= -0,05p + 75 \\ -0,05p + 75 &= 0 \\ -0,05p &= -75 \quad | :(-0,05) \\ p &= 1500 \end{aligned}$$

Kontrollime, kas leitud statsionaarne punkt on maksimumpunkt:

$$R'' = -0,05 < 0 \quad \text{kumerus, on maksimum}$$

Nõudlusfunktsioonis leiame sellise summa korral väljarenditavate autode arvu:

$$q(1500) = -0,025 \cdot 1500 + 75 = 37,5 \approx 38$$

Vastus: Maksimaalset tulu autode rentimisest saadakse, kui nädalarent on 1500 kr ja sellisel juhul renditakse välja umbes 38 autot.

ÜLESANDED

1.83 Tootja poolt tehtud kulutused on 5 kr toote kohta. Turuuring näitas, et kui toodet müüa hinnaga p , siis ostetakse päevas $20 - p$ toodet. Millise hinnaga tuleks seda toodet müüa, et kasum oleks maksimaalne?

1.84 Teatud hüvise nõudlust kirjeldab funktsioon $q^D(p) = 160 - 2p$, kus p on hüvise hind. Millise hinna korral on tarbija kulutused sellele hüvisele kõige suuremad?

1.85 Videokassettide laenutajal on 400 kassetti ja ühe kasseti laenutamine maksab 20 kr ööpäevas. Sellise tasu korral laenutatakse välja 200 kassetti päevas. Kui tasu vähendatakse 10 kr võrra, tõuseb laenutuste arv 300 kassetini päevas. Kas oleks vaja kassette juurde muretseda, et saada maksimaalset tulu?

1.86 Tootja kulude analüüs näitab, et tootes x toodet päevas, on kulud järgmised:

- a) tööjõu kulu päevas 12000 kr;
- b) otsene materjalikulu 150 kr tooteühiku kohta;
- c) tellimuskulud $\frac{2500}{x^2}$ kr päevas.

Leida kulufunktsioon ja määrata toodete arv päevas, et kulud oleksid minimaalsed.

1.87 Kiivrite tootmiseks tehtavad kulutused (tööpinkide seadistuskulud + talitluskulud) sõltuvad tööpinkide arvust n järgmiselt: $C(n) = 200n + \frac{12800}{n}$. Leida tööpinkide arv, mille korral kogukulud on minimaalsed.

1.88 Ettevõtte kulude analüüs näitas, et 50 toote tootmisel olid otsesed kulud materjalile ja energiale 2350 kr. Otseste tööjõukulude leidmiseks on teada, et tükitöötasu on 70 kr, millele lisandub sotsiaal- ja haigekassamaks (33%). Administratiivkulud on 9000 kr kuus ja tootmisruumide rent 2000 kr kuus.

Nõudluse uurimisel selgus, et

- 1) nõudlusfunktsioon on teatud piirides lineaarne,
- 2) hinnaga 250 kr müüdi 254 toodet kuus,
- 3) hinnaga 200 kr müüdi 1000 toodet kuus.

Leida optimaalne tootmismah, optimaalne hind ja maksimaalne kasum.

1.89 Näidata, et keskmised kulud tooteühiku kohta on minimaalsed sellise tootmismahu korral, mille korral nad on võrdsed piirkuluga.

1.90 Tehas sai tellimuse valmistada teatud toodet koguses q tükki. Ühe tööpingi jõudlus on n tk tunnis. Seadistuskulud on s krooni tööpingi kohta ja talitluskulud p krooni tunnis.

a) Leida tööpinkide arv, mille korral summarsed kulud (seadistuskulud + talitluskulud) on minimaalsed.

b) Näidata, et kui kogukulu on minimaalne, võrduvad seadistuskulud talitluskuludega.

1.91 Trükikoda sai tellimuse ristkülikukujulise plakati valmistamiseks. Prinditav ala pidi olema pindalaga 25 cm², ülemine ja alumine ääris 4 cm ning vasak- ja paremääris 2 cm. Milliste mõõtmetega on väikseim paberileht, millele plakat mahub?

1.92 *) Elektrialajaam asub jõe kaldal. Teisel kaldal 1500 m allavoolu asub tehas. Tuleb paigaldada kaabel alajaamast tehaseni. Milline oleks paigalduskulude seisukohalt parim trajektor kaabli paigaldamiseks, kui kaabli panek maa peal maksab 200 kr meeter ja vee alla 350 kr meeter? Kui suured on sel juhul paigalduskulud? Jõe laius on 1200 m.

Varude juhtimine

Kaubavarude juhtimise (*inventory control*) eesmärk on kogukulude minimeerimine kauba hankimisel. Võetakse arvesse hankekulud (transport, kauba kaalumine, vormistamine) ja säilitamiskulud (laokulud, kinnikulmutatud kapitalikulud), mõnikord ka trahvikulud puuduva kaubakoguse korral või saamatajäänud tulu. Ostukulu (kauba maksumust) arvestatakse juhul, kui on tegemist erinevate pakkumistega ja hinnad on erinevad, samuti allahindluspakkumiste korral. Lihtsaimate mudelite korral eeldatakse, et

- ▶ kaubavarude vähenemine on ajas lineaarne,
- ▶ uus partii saabub parajasti siis, kui kaubavarud on jõudnud nullini.

Kaubavarude juhtimine on üks mittelineaarse planeerimise ülesandeid. Keerulisemate probleemidega varude juhtimise kohta võib tutvuda raamatutes (Paas, T. Kvantitatiivsed meetodid majanduses (majandusmatemaatika). Tartu, 1997., Übi, E. Planeerimise ja juhtimise matemaatika. "Külim", Tln 1998).

Olgu ajaühikuks aasta. Võtame kasutusele järgnevad tähistused:

Q kauba vajadus aasta jooksul,

q kaubapartii suurus (korruga tellitavate ühikute arv),

x kaubavaru laos,

n aasta vältel tellitavate kaubapartiide arv, $n = \frac{Q}{q}$,

Δt intervall kahe kaubapartii soetamise vahel (aastates), $\Delta t = \frac{1}{n}$

C_h summaarsed hankekulud aasta jooksul,

c_h ühe kaubapartii hankekulud,

C_s summaarsed säilitamiskulud aasta jooksul,

c_s kaubaühiku säilitamiskulud aastas,

C kogukulu aasta jooksul.

Optimeerida tuleb kogukulu C . Kogukulu sõltub kaubapartii suurusest q , mis on argumendiks. On vaja leida avaldis, mis kirjeldab kogukulude $C(q)$ sõltuvust partii suurusest q :

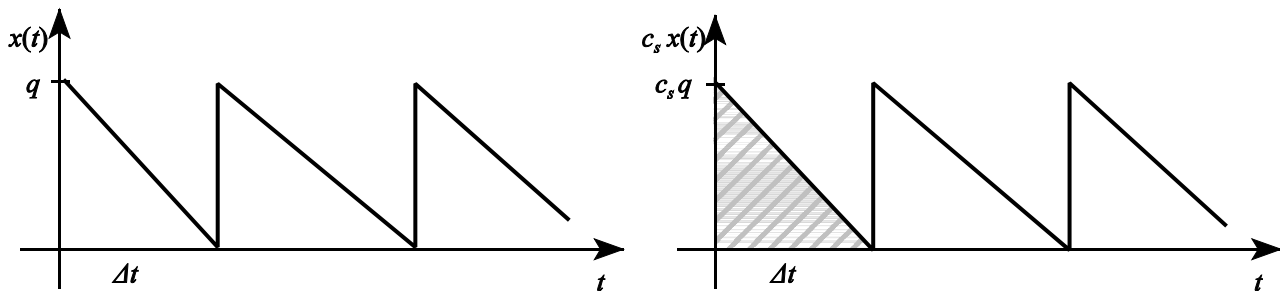
$$C(q) = C_h(q) + C_s(q)$$

Summaarsed hankekulud aasta kohta saame, kui partiide arvu aastas korrutame ühe partii hankekuludega:

$$C_h(q) = n c_h = \frac{Q}{q} c_h$$

Summaarsete säilituskulude C_s leidmiseks vaatame joonist 40. Vasakpoolsel graafikul on vertikaalteljel kaubavarude suurus laos x , mis sõltub ajast t . Eeldame, et müük toimub ühtlaselt. Ajavahemiku Δt jooksul vähenevad kaubavarud lineaarselt tasemest q kuni nullini.

Parempoolsel graafikul on vertikaalteljel säilituskulud ajaühikus, mille saamiseks on kaubaühiku



Kaubavaru laos x sõltub ajast.

Säilituskulud Δt jooksul on võrdsed 1 kolmnurga pindalaga.

Joonis 40. Kaubavarude ja säilituskulude sõltuvus ajast.

säilitamiskulud ajaühikus c_s korrutatud läbi kaubaühikute arvuga (kaubavarudega) x . Kuna kaubavarud muutuvad, siis muutuvad ka säilituskulud ajaühikus $c_s x$. Säilituskulud ajavahemiku Δt

jooksul on võrdsed kolmnurga pindalaga $\frac{c_s q \Delta t}{2}$.

Kui aasta jooksul tellitakse n partiid, siis aastas on n perioodi pikkusega Δt ja seega on graafikul n kolmnurka. Summaarsed säilituskulud aasta jooksul on võrdsed n kolmnurga pindalaga:

$$C_s = n \frac{c_s q \Delta t}{2} .$$

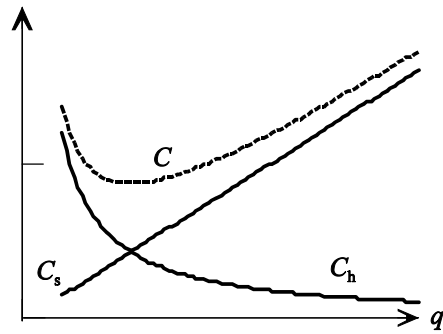
Kui meil ajaühikuks on üks aasta, siis ajavahemik kahe kaubapartii tellimise vahel $\Delta t = \frac{1}{n}$. Tehes

vastava asenduse, saame, et summaarsed säilituskulud aasta jooksul

$$C_s = \frac{c_s q}{2} .$$

Kogukulud aasta jooksul sõltuvad partii suurusest q järgmiselt:

$$C(q) = \frac{Q c_h}{q} + \frac{c_s q}{2} .$$



Joonis 41 Kogukulud, hankekulud C_h ja säilituskulud C_s

II Järgnevalt leiame funktsiooni $C(q)$ miinimumi. Selleks leiame tuletise ja selle nullkohad.

$$C'(q) = -\frac{Qc_h}{q^2} + \frac{c_s}{2}$$

$$-\frac{Qc_h}{q^2} + \frac{c_s}{2} = 0$$

$$\frac{Qc_h}{q^2} = \frac{c_s}{2}$$

$$q = \sqrt{\frac{2Qc_h}{c_s}}$$

Optimaalse partii suurus, mille korral kogukulud on minimaalsed:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2Qc_h}{c_s}}$$

Kulude suurus optimaalse partii suuruse korral (**minimaalsed kulud**):

$$C_{min} = \sqrt{2Qc_h c_s}$$

ÜLESANDED

1.93 Lähtudes kogukulude avaldisest $C(q) = \frac{Qc_h}{q} + \frac{c_s q}{2}$ näidata, et kui kaubapartii suurus on optimaalne, $q_{opt} = \sqrt{\frac{2Qc_h}{c_s}}$, siis

summaarsed kulud $C(q_{opt}) = \sqrt{2Qc_h c_s}$.

1.94 Leida, kuidas tuleb muuta optimaalse tellimuse suurust, kui

- kaubapartii hankekulud suurenevad 15%;
- kaubaühiku säilituskulud aastas suurenevad 5%;
- kauba aastane vajadus väheneb 20%.

1.95 Kauba X aastanõudlus on 400 tk, ühe partii hankekulud 100 kr ja kaubaühiku säilitamiskulud 2 kr aastas.

- Leida summaarsed kulud, kui kogu aastapartii tellitakse korraga.
- Leida optimaalse partii suurus ja minimaalsed kulud.

1.96 Firma kasutab 1 550 000 m riiet aastas, kusjuures 1m seda riiet maksab 25 krooni. Materjali hankekulud on 1000 kr tellimuse kohta ning säilituskulud aastas moodustavad 20% varu maksumusest. Materjali müüa pakub 0,5%-list hinnaalandust, kui tellimuse kogus oleks 50 000 m. Leida

- optimaalse tellimuse suurus;
- minimaalne kogukulu aastas ilma kauba maksumuseta;

- c) minimaalne kogukulu aastas koos ostukuluga (kauba maksumusega);
 d) kas võtta vastu hinnaalandus?

1.97 Tellimisel eeldatakse, et kaubavarud ei tohi väheneda nullini, vaid uus partii saabub, kui kaubavarud laos on vähenenud suuruseni q_0 .

- a) Leida summaarsed säilituskulud aastas.
 b) Kas optimaalse partii suurus muutub sel juhul?
 c) Kas minimaalne kogukulu muutub sel juhul?

1.98 USA bussikompanii Wide Lines vajab pidevalt uusi bussijuhte, keskmiselt 5 juhti kuus. Uute juhtide koolitus toimub 6-nädalastel kursustel. Kui kursusest osavõtjate arv on alla 35, läheb ühe rühma koolitamine maksma 22000 \$. Kui peale kursuste lõppu pole vastsele juhile kohe tööd pakkuda, maksab firma talle 1600\$ kuus. Neid kulusid võib firma poolt vaadata bussijuhtide reservi säilitamise kuludena, et vajadusel oleks kohe uus, koolitatud bussijuht võtta.

- a) Kui suured peaksid olema bussijuhtide koolitusrühmad, et kompanii kogukulud koolitusele ja reservile oleksid minimaalsed?
 b) Mitu koolitustsükli tuleks kompaniil igal aastal läbi viia?
 c) Milised oleksid kompanii kogukulud aastas soovitatava rühma suuruse korral?

Marginaalanalüüsi kasutamine

Leiame kasumi tuletise, arvestades, et kasum on tulude ja kulude vahe

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

$$P'(q) = (R(q) - C(q))' = R'(q) - C'(q)$$

Kasutame tuletiste asemel piirsuursusi: $R'(q) = MR(q)$, $C'(q) = MC(q)$ ja $P'(q) = MP(q)$:

$$MP(q) = MR(q) - MC(q)$$

Piirkasum MP on lisakasum ühe lisatoote tootmisel ja müümisel ning võrdub piirtulu miinus piirkulu.

Tootmise üks põhieesmärke on **maksimaalse kasumi** saamine. Maksimaalse kasumi korral on kasumi tuletis ehk piirkasum null. Seega tingimus kasumi maksimeerimiseks:

Kasum on maksimaalne, kui piirkulu võrdub piirtuluga

$$MC = MR$$

See tähendab, et kasum on maksimaalne, kui täiendava tooteühiku tootmisel tehtav lisakulu on võrdne selle tooteühiku müümisel saadava lisatuluga (Kerem, K., Randveer, M., Vensel, V. Mikroökonoomika alusteooriad. "Külim", Tln 1996. Lk. 99).

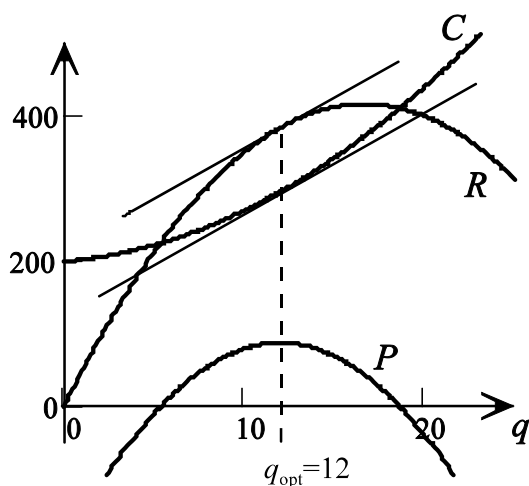
NÄIDE 1.25. Marginaalanalüüs

Olgu antud kulufunktsioon ja tulufunktsioon ning leiame vastavad piirsuursused:

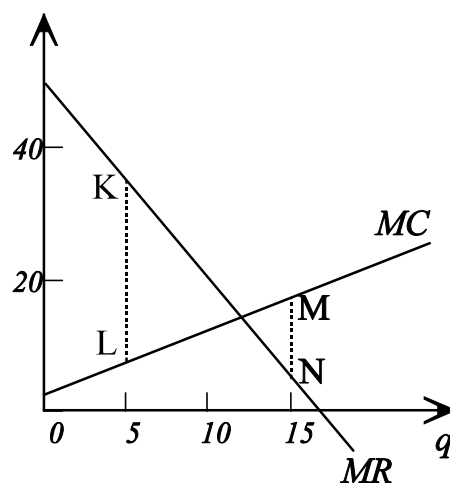
$$C(q) = 0,5q^2 + 2q + 200 \quad MC = q + 2$$

$$R(q) = -1,5q^2 + 50q \quad MR = -3q + 50$$

Joonisel 42 on toodud kulu ja tulu graafikud, lisaks ka vastav kasumigraafik. Joonisel 43 on toodud piirkulu ja piirtulu graafikud. Kasumi maksimumi korral on piirtulu ja piirkulu võrdsed. Joonisel 42 on see näha sellest, et vastavas punktis on kulugraafiku ja tulugraafiku puutujatel ühesugune tõus, nad on paralleelsed. Sellel joonisel väljendab piirsuursust puutuja tõus. Piirsuursuste graafikul joonisel 43 on piirkulu ja piirtulu võrdsus selgemini näha – selles punktis piirtulu ja piirkulu graafikud lõikuvad.



Joonis 42 Kasum, tulu, kulu



Joonis 43 Marginaalanalüüs

Vaatame veel joonist 43. Punktis $q=5$ on lõigu KL pikkus võrdne lisakasumiga ühe lisatoote tootmisel,

$$MP(5) = MR(5) - MC(5) = 35 - 7 = 28$$

Punktis $q=15$ on aga kasumi muutus negatiivne, tootmistahtu suurendada pole kasulik:

$$MP(15) = MR(15) - MC(15) = 5 - 17 = -12$$

- ▶ Kui piirtulu suurem kui piirkulu, $MR > MC$, on piirkasum ehk kasumi muutus ühe lisatoote tootmisel positiivne, tootmistahtu on kasulik suurendada.
- ▶ Kui piirtulu ja piirkulu on võrdsed, $MR = MC$, on kasum maksimaalne ja tootmistahtu suurendades kasum ei muutu.
- ▶ Kui piirtulu on väiksem piirkulust, $MR < MC$, lisatoote tootmine suurendab tulusid vähem kui kulusid, kasum väheneb.

Marginaalanalüüsi kasutatakse mitmesuguste probleemide analüüsimiseks. Üheks näiteks on diskrimineerivate hindade kasutamine.

Diskrimineeriv hinnapoliitika on ühesuguste kaupade müümine eri ostjatele erinevate hindadega. Sellisel juhul kujunevad hinnad nii, et võrdus $MC = MR$ kehtib iga turu jaoks eraldi (Raju, O., Kerem, K., Randveer, M. Mikroökonomika õpik. Kuldkrooni kirjastus, Tartu, 1996. Lk. 213).

NÄIDE 1.26. Hinnadiskriminatsioon

Telefoniteenuseid pakkuv firma on analüüsinud nõudlust tööpäevadel ja puhkepäevadel:

tööpäevadel $q_A = 90 - 0,5p_A$ ja puhkepäevadel $q_B = 35 - 0,25p_B$,

kus q_A ja q_B on kõnede arv tunnis ning p_A ja p_B vastavad hinnad. Summaarsed kulud tunnis $C(q) = 25 + 20q$, kus $q = q_A + q_B$. a)

Leida, millised peaksid olema vastavad hinnad, et kasum oleks maksimaalne.

b) Leida, kui palju on saadav kasum väiksem, kui kasutada ühesugust hinda (ilma hinnadiskriminatsioonita).

Lahendus:

a) Avaldame mõlema turu jaoks hinna sõltuvuse kogusest:

$$p_A = 180 - 2q_A$$

$$p_B = 140 - 4q_B$$

Leiame tulufunktsioonid ja vastavad piirtulud

$$R_A = q_A p_A = 180q_A - 2q_A^2 \quad MR_A = R'_A = 180 - 4q_A$$

$$R_B = q_B p_B = 140q_B - 4q_B^2 \quad MR_B = R'_B = 140 - 8q_B$$

Piirkulud $MC = C'(q) = 20$. Kasutame nüüd kasumi maksimeerimise tingimust mõlema turu jaoks ja leiame kogused:

$$\begin{aligned} MC &= MR_A \\ 20 &= 180 - 4q_A \\ 4q_A &= 160 \\ q_A &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR_B \\ 20 &= 140 - 8q_B \\ 8q_B &= 120 \\ q_B &= 15 \end{aligned}$$

Leiame vastavad hinnad

$$p_A = 180 - 2 \cdot 40 = 100$$

$$p_B = 140 - 4 \cdot 15 = 80$$

Vastus: Maksimaalse kasumi saamiseks peaks hind tööpäevadel olema 100 ja puhkepäevadel 80 ühikut.

b) Kui hinnad on võrdsed, siis $p_A = p_B = p$ ning nõudlusfunktsioonid võib liita

$$q = q_A + q_B = (90 - 0,5p) + (35 - 0,25p) = 125 - 0,75p$$

Avaldades siit hinna, saame

$$p = \frac{500}{3} - \frac{4}{3}q.$$

Tulufunktsioon ja vastav piirtulu

$$R = qp = \frac{500}{3}q - \frac{4}{3}q^2 \quad MR = R' = \frac{500}{3} - \frac{8}{3}q$$

Võrdsustame piirkulu ja piirtulu ning leiame vastava koguse q :

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 20 &= \frac{500}{3} - \frac{8}{3}q \\ 60 &= 500 - 8q \\ q &= 55 \end{aligned}$$

$$\text{Vastav hind } p = \frac{500 - 4 \cdot 55}{3} = 93,33$$

$$\text{tulu } R = qp = 55 \cdot 93,33 = 5133,$$

$$\text{kulu } C = 25 + 20q = 25 + 20 \cdot 55 = 1125$$

$$\text{kasum } P = R - C = 5133 - 1125 = 4008.$$

Hinnadiskriminatsiooni korral aga (kasutades osas a) saadud tulemusi):

$$\text{tulu } R = q_A p_A + q_B p_B = 40 \cdot 100 + 15 \cdot 80 = 5200,$$

$$\text{kulu } C = 25 + 20(q_A + q_B) = 25 + 20(40 + 15) = 1125$$

$$\text{kasum } P = R - C = 5200 - 1125 = 4075.$$

Kasumite vahe erinevate variantide korral $4075 - 4008 = 67$.

Vastus: Kasutades tööpäevadel ja puhkepäevadel erinevaid hindu (hinnadiskriminatsioon), on kasum ühe tunni kohta 67 ühikut suurem.

ÜLESANDED

1.99 Olgu piirtulu $MR = 4350 - 26q$ ja piirkulu $MC = 3q^2 - 11q + 150$, kus q on tootmiskaht. Leida, kas on kasulik tootmiskahtu tõsta, kui

a) tootmiskaht on 20 ühikut;

b) tootmiskaht on 40 ühikut.

1.100 Kasutades marginaalanalüüsi, leida tootmiskaht maksimaalse kasumi saamiseks, kui tulufunktsioon on

$$R = 1400q - 7,5q^2 \text{ ja kulufunktsioon } C = q^3 - 6q^2 + 140q + 750.$$

1.101 Firma müüb ühte kaupa kahes erinevas regioonis. Olgu regioonis A nõudlusfunktsioon $p_A = 210 - 10q_A$, kus p_A on kauba

hind ja q_A nõutav kogus selles regioonis. Regioonis B on nõudlusfunktsioon $p_B = 125 - 2,5q_B$, kus p_B on kauba hind ja

q_B nõutav kogus regioonis B . Kogukulu $C(q) = 2000 + 10q$, kus q on summaarne tootmiskaht, $q = q_A + q_B$. Leida, kui palju ja

milliste hindadega tuleb müüa kaupa piirkonnas A ja piirkonnas B , et saada maksimaalset kasumit

a) diskrimineeriva hinnapoliitika korral;

b) ühesuguste hindade korral.

c) Kui suur on kasumi erinevus diskrimineeriva ja mittediskrimineeriva hinnapoliitika korral?

Seos piirsuuruste ja keskmiste suuruste vahel

NÄIDE 1.27. Keskmine kulu ühiku kohta ja piirkulu

Kulude statistilisel analüüsil saadi kulufunktsiooniks $C(q) = 3q^2 + q + 48$. Leiame, millise tootmismahu q väärtuse juures on keskmine kulu ühiku kohta kõige väiksem ja millise tootmismahu korral on keskmine kulu ühiku kohta võrdne piirkuluga.

Lahendus: Keskmine kulu ühiku kohta

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2 + q + 48}{q} = 3q + 1 + \frac{48}{q}$$

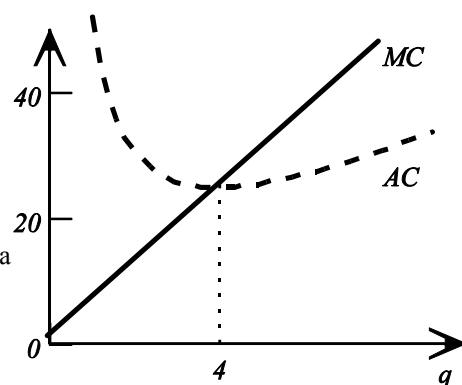
On vaja leida AC globaalne miinimum vahemikus $q > 0$. Esimene tuletis

$$AC'(q) = 3 - \frac{48}{q^2} = \frac{3q^2 - 48}{q^2} = \frac{3(q-4)(q+4)}{q^2}$$

on null vahemikus $q > 0$, kui $q = 4$. Kuna teine tuletis $AC''(q) = \frac{96}{q^3}$ on positiivne, kui $q > 0$, on tegemist miinimumiga selles punktis. Järelikult kulu ühiku kohta on minimaalne tootmismahu 4 ühikut korral.

Et leida, millal piirkulu ja keskmine kulu ühiku kohta on võrdsed, leiame kulufunktsiooni tuletise ja lahendame vastava võrrandi q suhtes:

$$\begin{aligned} MC(q) &= AC'(q) \\ C'(q) &= AC'(q) \\ 6q + 1 &= 3q + 1 + \frac{48}{q} \\ 3q &= \frac{48}{q} \\ q^2 &= 16 \\ q &= 4 \quad | \quad q > 0, -4 \text{ ei kõlba} \end{aligned}$$



Joonis 44 Piirkulu ja kulu ühiku kohta

Seega piirkulu ja keskmine kulu ühiku kohta on võrdsed sama tootmismahu juures, kus keskmine kulu ühiku kohta oli minimaalne (joonis 44).

Saadud seos on üldine, mida matemaatiliselt näidatakse järgmiselt:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Leiame tuletise, kasutades jagatise tuletise valemit:

$$AC'(q) = \frac{C'(q)q - C(q) \cdot 1}{q^2}$$

Kriitiliste punktide leidmiseks leiame tuletise nullkohad. Murd on null, kui murru lugeja on null,

$$\begin{aligned} C'(q)q - C(q) &= 0 \\ C'(q)q &= C(q) \quad | :q \\ C'(q) &= \frac{C(q)}{q} \\ MC &= AC \end{aligned}$$

Majanduslik seletus on järgmine:

- ▶ Kui ühe lisäühiku tootmisel on lisakulu väiksem kui kulu ühiku kohta antud tootmismahu korral ($MC < AC$), siis see vähem kulukas lisäühik vähendab keskmist kulu ühiku kohta.
- ▶ Kui lisakulu on suurem, kui kulu ühiku kohta antud tootmistaseme juures ($MC > AC$), on see lisäühik kulukam, kui senised ühikud, ja keskmine kulu ühiku kohta suureneb.
- ▶ Kui lisakulu on võrdne keskmise kuluga ühiku kohta ($MC = AC$), siis lisäühik ei suurenda ega vähenda seda, keskmisel kulu on seal kriitiline punkt (tavaliselt lokaalne miinimum).

Sarnane seos kehtib ka teiste suuruste (tulu, kogutoodang) korral. Mõne suuruse korral võib kriitilises punktis olla lokaalne maksimum, mõne suuruse korral lokaalne miinimum. Üldiselt, olgu AY suuruse Y keskmine ühikuline väärtus ja MY vastav piirsuurus. Siis

- ▶ AY kasvab, kui $MY > AY$;
- ▶ AY kahaneb, kui $MY < AY$;
- ▶ suurusel AY on kriitiline koht, kui $MY = AY$.

ÜLESANDED

1.102 Kulufunktsioon on $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$.

- a) Leida, millise tootmismahu juures on keskmine kulu ühiku kohta minimaalne.
- b) Leida, millise tootmistaseme juures on keskmine kulu ühiku kohta võrdne piirkuluga.

1.103 Kulufunktsioon on $C(q) = q^3 + 5q + 162$.

- a) Leida, millise tootmismahu juures on keskmine kulu ühiku kohta minimaalne.
- b) Leida, millise tootmistaseme juures on keskmine kulu ühiku kohta võrdne piirkuluga.

1.104 Statistiline analüüs näitab, et vahemikus $5 < q < 30$ võib tulu muutumist kirjeldada funktsiooniga

$$R(q) = -2q^2 + 68q - 128.$$

- a) Leida, millise tootmismahu juures on keskmine tulu ühiku kohta võrdne piirtuluga.
- b) Näidata, et keskmine tulu ühiku kohta kasvab, kui tootmistaht on väiksem osas a) leitust ja kahaneb, kui tootmistaht on suurem osas a) leitust.

1.105 Ettevõtte kogutoodang q sõltub tööjõust L . Näidata, et tööjõu tootlikkus (kogutoodang töötunni kohta) on maksimaalne, kui tööjõu piirtootlikkus (kogutoodangu tuletis tööjõu järgi) võrdub tootlikkusega.

1.106 Näidata, et suuruse $y(x)$ keskmine väärtus ühiku kohta $Ay = \frac{y(x)}{x}$ omab statsionaarset punkti kohas, kus $Ay = My$,

($My = y'(x)$ on suuruse y piirsuurus.)

Nõudluse hinnaelastsus.

Hinna p suhteline muut ja koguse q suhteline muut on seotud järgmiselt:

$$\frac{\Delta q}{q} = E \frac{\Delta p}{p}$$

kus E on hinnaelastuskoeffitsient. Kui $\frac{\Delta p}{p} = 1\%$, siis $\frac{\Delta q}{q} = E\%$.

Nõudluse hinnaelastuskoeffitsient näitab, mitu protsenti muutub nõutav kogus hinna muutumisel 1% võrra.

Miks seda koeffitsienti nimetatakse elastsuskoeffitsiendiks? Analoogia võib tuua füüsikast, kus on teada, et traadi suhteline pikenemine $\frac{\Delta l}{l}$ on võrdeline jõuga F pindalaühiku kohta, $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon \frac{F}{S}$, ning võrdetegurit ε nimetatakse elastsusmooduliks.

Olgu meil antud nõutava koguse q sõltuvus hinnast p , $q = q(p)$. Nõudluse hinnaelastuskoeffitsient on nõutava koguse suhteline muutus jagatud hinna suhtelise muutusega:

$$E^D = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \frac{p}{q}$$

Selle nimetuseks on **joonelastuskoeffitsient** ehk **kaarelastuskoeffitsient**, kuna selle leidmiseks on välja valitud kindel vahemik ehk kaar.

Kui me soovime leida hinnaelastuskoeffitsienti aga konkreetse hinna p juures, peame vahemikult üle minema punktile ja vahemiku laius $\Delta p \rightarrow 0$. Arvestades, et $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{dq}{dp}$, saame avaldise, millele läheneb joonelastuskoeffitsient.

Nõudluse hinnaelastsuskoeffitsient

$$E^D(p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

kus p on hind ja q nõutav kogus.

Seda nimetatakse **punktelastsuseks**.

- ▶ Kui nõudlusfunktsiooni kuju on teada, kasutatakse punktelastsust.
- ▶ Kui nõudlusfunktsiooni täpne kuju pole teada, kasutatakse joonelastsust ning muudud Δp ja Δq leitakse empiiriliste andmete põhjal vaatlustulemustest.

Hind p ja nõutav kogus q on alati positiivsed, $p > 0$ ja $q > 0$. Nõudlusseaduse järgi on nõudlusfunktsioon enamasti kahanev, seega selle tuletis on negatiivne, $q'(p) < 0$. Järelikult **hinnaelastsuskoeffitsient on enamasti negatiivne**.

Hinnaelastsuskoeffitsiendi absoluutväärtuse alusel eristatakse kolme liiki nõudlust:

- ▶ $0 < |E^D(p)| < 1$ nõudlus on **mitteelastne**;
- ▶ $|E^D(p)| = 1$ nõudlus on **ühikelastne**;
- ▶ $|E^D(p)| > 1$ nõudlus on **elastne**.

NÄIDE 1.28. Hinnaelastsuskoeffitsiendi leidmine

Olgu antud nõudlusfunktsioon $q(p) = -1000p + 10000$. Leida nõudluse hinnaelastsuskoeffitsient hinna $p = 2$ korral ja otsustada, kas tegemist on elastse või mitteelastse nõudlusega.

Lahendus:

$$E^D(p) = \frac{pq'(p)}{q(p)} = \frac{-1000p}{-1000p + 10000}$$

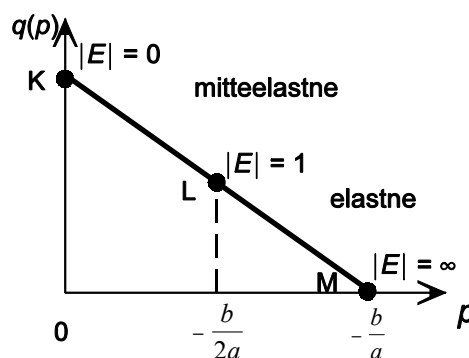
$$E^D(2) = \frac{-1000 \cdot 2}{-1000 \cdot 2 + 10000} = -0,25$$

Vastus: Kuna $|-0,25| = 0,25 < 1$, on nõudlus mitteelastne.

Olgu meil tegemist **lineaarse nõudlusfunktsiooniga**, $q(p) = ap + b$, kus a ja b on konstandid, $a < 0$. Leiame hinnaelastsuskoeffitsiendi. Arvestades, et $q'(p) = a$, saame

$$E^D(p) = \frac{pq'(p)}{q(p)} = \frac{ap}{ap + b}$$

- ▶ Selleks et $E^D = 0$, peab lugeja olema null ja $p = 0$ (punkt K joonisel 45)
- ▶ Selleks et $|E^D| = \infty$, peab nimetaja olema null, $ap + b = 0$ ja $p = -\frac{b}{a}$ (punkt M).
- ▶ Selleks et $|E^D| = 1$, peab $\frac{ap}{ap + b} = -1$ ja $p = -\frac{b}{2a}$ (punkt L).



Joonis 45 Hinnaelastsus lineaarse nõudlusfunktsiooni korral

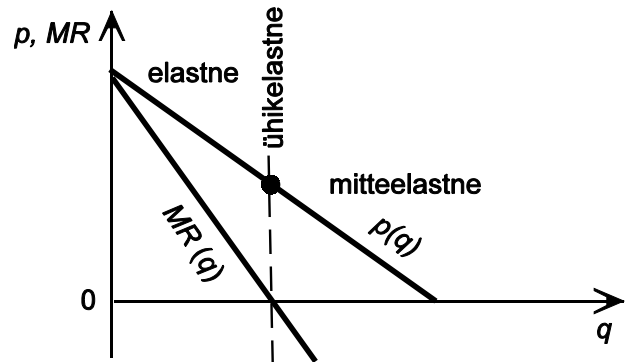
Seega lineaarse nõudlusfunktsiooni korral on suuremate hindade korral hinnaelastsuskoeffitsiendi absoluutväärtus suurem, tarbija reageerimine hinna muutusele on tundlikum.

Olgu nõudlusfunktsioon esitatud hinna p sõltuvusena nõutavast kogusest q ja olgu funktsiooni kuju lineaarne: $p(q) = b - aq$, kus a ja b on positiivsed konstandid. Leiame avaldise piirtulu jaoks:

$$\begin{aligned} \text{kogutulu } R &= qp = bq - aq^2 \\ \text{piirtulu } MR &= R' = b - 2aq \end{aligned}$$

Seega piirtulu on antud juhul samuti lineaarne ning piirtulu graafikuks sirge, mille kalle on kaks korda suurem (joonis 46).

- ▶ Elastse nõudluse korral on piirtulu positiivne ning hinna languse tulemuseks on kogutulu kasv.
- ▶ Mitteelastse nõudluse korral on piirtulu negatiivne ja hinna langedes kogutulu kahaneb.
- ▶ Ühikelastse nõudluse korral on piirtulu 0 ja kogutulu konstantne.



Joonis 46 Hinnaelastsus ja piirtulu lineaarse nõudlusfunktsiooni korral

ÜLESANDED

1.107 Olgu nõudlusfunktsioon $q(p) = -3000p + 120000$. Leida nõudluse hinnaelastsuskoeffitsient antud hinna korral ning nõutav kogus ja kogutulu antud hinna, 10% suurema hinna ja 10% väiksema hinna korral:

- $p = 15$ kr;
- $p = 20$ kr;
- $p = 30$ kr.

1.108 Kirjeldagu hinnavaheemikus $0 \leq p \leq 600$ nõudlust funktsioon $q = 60 - 0,1p$.

- Avaldada hinnaelastsuskoeffitsient p funktsioonina.
- Leida hinnaelastsuskoeffitsient hinna 200 kr korral. Tõlgendada saadud tulemust.

1.109 Olgu nõudlusfunktsioon $q(p) = -5p + 3000$. Leida, millise hinna korral on nõudlus ühikelastne, $E^D(p) = -1$.

1.110 Kirjeldagu hinnavaheemikus $0 \leq p \leq 10$ teatud hüvise nõudlust funktsioon $q = 200 - 2p^2$.

- Avaldada hinnaelastsuskoeffitsient hinna p funktsioonina.
- Leida hinnaelastsuskoeffitsient hinna $p = 6$ kr korral ja tõlgendada saadud tulemust.
- Millise hinna korral on nõudlus ühikelastne?

1.111 Näidata, et kui nõutava koguse ja hinna vahel on pöördvõrdeline sõltuvus, on nõudlus suvalise hinna korral ühikelastne, s.t. kogutulu jääb hinna muutudes konstantseks.

1.112 Olgu teatava hüvise nõudlusfunktsiooni kujul $q = \frac{a}{p^m}$, kus a ja m on positiivsed konstandid. Näidata, et hinnaelastsuskoeffitsient on konstantne ja võrdub $-m$ suvalise hinna p korral.

Seos hinnaelastsuse ja kogutulu vahel.

Tulufunktsioon on hinna p ja koguse q korrutis

$$R = pq .$$

Leiame tulufunktsiooni tuletise hinna järgi, kasutades korrutise tuletise reeglit:

$$\frac{dR}{dp} = p \frac{dq}{dp} + \frac{dp}{dp} q = p \frac{dq}{dp} + q .$$

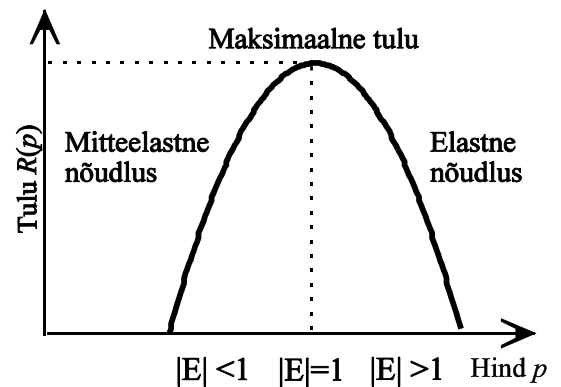
Hinnaelastsuskoeffitsiendi avaldisest $E = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$ saame, et esimene liidetav $p \frac{dq}{dp} = Eq$ ning tehes

vastava asenduse:

$$\frac{dR}{dp} = Eq + q = q(E + 1) .$$

Kogus q on alati positiivne, järelikult tuletise märk sõltub avaldise $E + 1$ märgist.

- ▶ Mitteelastse nõudluse korral $-1 < E < 0$. Sellisel juhul avaldis $E + 1 > 0$, järelikult $\frac{dR}{dp} > 0$.
Mitteelastse nõudluse korral on tulufunktsiooni tuletis positiivne, hinna kasvades kogutulu kasvab.
- ▶ Elastse nõudluse korral $E < -1$. Sellisel juhul avaldis $E + 1 < 0$ ja $\frac{dR}{dp} < 0$. Elastse nõudluse korral on tulufunktsiooni tuletis negatiivne, hinna kasvades kogutulu kahaneb.
- ▶ Ühikelastse nõudluse korral $E = -1$ ning avaldis $E + 1 = 0$ ja samuti tuletis $\frac{dR}{dp} = 0$. Ühikelastse



Joonis 47

nõudluse korral on tulufunktsioon statsionaarne. Kui selles punktis läheb mitteelastne nõudlus üle elastseks ning tulu tuletis muudab märki, on see ka lokaalne maksimumkoht.

ÜLESANDED

- 1.113 Kirjeldagu hinnavahemikus $0 \leq p \leq 35$ teatud hüvise nõudlust funktsioon $q = 120 - 0,1p^2$.
- a) Määrata kindlaks, millises hinnavahemikus on nõudlus elastne, mitteelastne ja ühikelastne.
 - b) Kasutades eelmises osas saadud tulemusi, määrata kindlaks, millises hinnavahemikus kogutulu kasvab, millises vahemikus kahaneb ja millise hinna korral on tulu maksimaalne.
 - c) Leida tulufunktsioon ja kasutades selle I tuletist, leida, millises hinnavahemikus tulu kasvab, millises vahemikus kahaneb ja millise hinna korral on tulu maksimaalne.
- 1.114 Kirjeldagu hinnavahemikus $0 \leq p \leq 250$ teatud hüvise nõudlust funktsioon $q = 500 - 2p$.
- a) Määrata kindlaks, millises hinnavahemikus on nõudlus elastne, mitteelastne ja ühikelastne.
 - b) Kasutades eelmises osas saadud tulemusi, määrata kindlaks, millises hinnavahemikus kogutulu kasvab, millises vahemikus kahaneb ja millise hinna korral on tulu maksimaalne.
 - c) Leida tulufunktsioon ja kasutades selle I tuletist, leida, millises hinnavahemikus tulu kasvab, millises vahemikus kahaneb ja millise hinna korral on tulu maksimaalne.

VASTUSED

1.1 a) 500 kr/tk; b) 500 kr/tk. **1.2** a) 4500 kr/tk, b) 4300 kr/tk **1.3** Suureneb kiirusega 96 miljonit inimest aastas.
1.4 a) Väheneb kiirusega 0,12 kr/tk²; b) suureneb kiirusega 0,017 kr/tk². **1.5** 2h 19min. **1.6** 78,97 kr. **1.7** a) Väheneb kiirusega 0,022 kr/tk²; b) suureneb kiirusega 0,0071 kr/tk². **1.8** 17°C. **1.10** a) 0,2 b) 0,2 tuh tk kuus **1.13** Pos. K ja O; null L ja N; neg. M. **1.14** a) $y = 2x - 1$; b) $y = -2x - 1$; c) $y = 4x - 4$ **1.15** a) ca 5 tuh kr kuus; b) ca -2 tuh. kr kuus; c) ca 10 tuh. kr kuus.

1.16 a) $27x^{26}$; b) $-\frac{27}{x^{28}}$; c) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; d) $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$; e) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; f) $-0,12x^{-1,12}$; g) bx^{b-1} ; h) $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{cx}$; i) $-0,5x^{-1,5}$; j) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$;

k) $-\frac{3}{2\sqrt[2]{x^5}}$ **1.17** a) $y' = 2x + 2$; b) $y' = 15x^4 - 12x^2 + 9$; c) $y' = 9x^8 - 40x^7 + 1$; d) $y' = 2x^7 - 3x^5 - 1$; e) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{2\sqrt[2]{t^3}}$;

f) $y' = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4}$; g) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$; h) $y' = -\frac{x}{8} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3}$; i) $y'(x) = 2ax + b$ **1.18** a) $f'(x) = 12x - 1$;

b) $f'(u) = -12u^2 + 4u + 10$; c) $y' = -300u - 20$ **1.19** a) $y' = x^3(4\ln x + 1)$; b) $y' = e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right)$; c) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$;

d) $y' = 15^x x^{14}(x \ln 15 + 15)$; e) $y' = 2 \sin x \cos x$; f) $y' = 2e^{2x}$ **1.20** a) $y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$; b) $f'(t) = \frac{-t^2 - 2}{(t^2 - 2)^2}$; c) $y' = -\frac{3}{(x+5)^2}$;

d) $f'(x) = \frac{11x^2 - 10x - 7}{(2x^2 + 5x - 1)^2}$; d) $y' = \frac{23}{(5x+4)^2}$; e) $f'(t) = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$ **1.21** 4,75 tuh. kr kuus; -2 tuh. kr kuus; 10 tuh. kr kuus

1.22 $y = -4t + 28$. **1.23** $200t + 400$; suureneb 1400 tk aastas. **1.24** suureneb 1200 kr. **1.25** a) 5 fraasi tunnis, b) 8 fraasi tunnis.
1.26 a) suureneb 300 kr ühiku kohta, b) suureneb 0,46 kr ühiku kohta. **1.29** a) 8 punkti tunnis; b) 10 punkti tunnis.

1.30 b) kasv 94,4 milj. kr kvartalis. **1.31** a) $dy = 8(x+1)dx$; b) $dy = -\frac{6dx}{x^4}$; c) $dy = \left(6x + \frac{5}{x} \right) dx$ **1.32** 50 töötundi. **1.33** ≈ 10 .

1.34 ≈ 16 . **1.35** $\approx 4,1$. **1.36** 588 000. **1.37** 2,8%. **1.38** 0,5%. **1.39** 0,7%. **1.40** b) 5; c) 19,67. **1.42** $-3,3q + 10000$, kus q on nõutav kogus. **1.43** $MC = 0,04q + 75$ **1.44** $C(q) = 300q + 2000$; $R(q) = 500q - 2q^2$; $P(q) = 200q - 2q^2 - 2000$. **1.45** Kui $p(q) = p_0 - aq$, siis $MR = p_0 - 2aq$. **1.46** a) $3(2x^4 - x)^2(8x^3 - 1)$; b) $\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$; c) $-\frac{10}{(2x+3)^6}$; d) $-\frac{1}{(t+1)^{1/2}(t-1)^{3/2}}$;

e) $2xe^{x^2}$; f) $\frac{1}{x}$; g) $-\frac{10}{3}(4x-3)(2x^2-3x-1)^{-\frac{13}{3}}$; h) $\frac{12}{5}x^2(x^3+1)^{-\frac{3}{5}}$; i) $x(x-4)^4(7x-8)$; j) $\frac{11(x-7)^9}{(x+4)^{11}}$;

k) $\frac{5}{2\sqrt{(x-2)(x+3)^2}}$; l) $\frac{12x(10x^4+2x^2+25)}{\sqrt{x^4+5}}$ **1.47** a) $DEPN'(t) = 89,2e^{0,0289t}$ milj. kr kuus, b) kasv 212 milj. kr kuus. **1.48**

väheneb ≈ 23 kg nädalas. **1.49** Kasvasid 3,1 % aastas. **1.50** a) $-\frac{q}{\sqrt{q^2+20}}$; b) $100 - \frac{q}{\sqrt{q^2+20}} - \sqrt{q^2+20}$ **1.51**

$K' = 100000 \left(1 + \frac{r}{12} \right)^{119}$ **1.52** a) Punktis a kasvav, punktis b kahanev; b) punktis a kahanev, punktis b kasvav; c) punktis a

kahanev, punktis b kasvav. **1.53** Väheneb. **1.54** Kahanev. **1.55** Langetada **1.56**a) $X \downarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \vee 1 < x < 3\}$;

$X \uparrow = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \vee x > 3\}$; lok. min (0; 20) ja (3; 17,75); lok. max (1; 20,417); b) $X \downarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 4\}$;

$X \uparrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x > 4\}$; lok. min (4; -55,667), lok. max (-5; 65,833); c) $X \downarrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, $X \uparrow = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, lok. max

(0; 10). **1.58** Suureneb. **1.59** Kasvab. **1.60** 5 **1.61** 600 toodet; 80 000 kr. **1.62** Kasum 341360 kr, kogus 194, hind 2060 kr.

1.63 Kasum 4,45 milj kr, hind 5000 kr ja kogus 1500. **1.64** Kasum 5430 kr, hind 70 kr ja kogus 140 tk. **1.65a)** $450x^8 - 120x^3$;

1.65b) 24; **1.65c)** 0; **1.65d)** $-\frac{5}{4\sqrt{x^3}} + \frac{18}{x^4} + \frac{1}{4\sqrt{x^5}}$; **1.65e)** $\frac{9\sqrt{x}}{4} + \frac{40}{3\sqrt[3]{x}}$. **1.66a)** $y' = 3x^2 + 6x + 9$; $y'' = 6x + 6$; $y''' = 6$;

$y^{(IV)} = 0$. **1.66b)** $y' = 72x - 55$; $y'' = 72$; $y''' = 0$. **1.67** a) 28 ühikut/h b) 10 ühikut/h²; c) 2,5; d) 2,3125. **1.68** a) hind suureneb 195 kr kuus; b) hinna muutumise kiirus väheneb 16 kr/kuu². **1.69** a) käänupunkt $x = 1$, $\hat{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $\check{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$; b)

käänupunkt $x = 0$, $\hat{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, $\check{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; c) käänupunktid $x = -1$, $x = 1$, $\check{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$,

$\hat{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > 1\}$. **1.70** a) 49 kr päevas, väheneb b) 61 kr päevas, suureneb, c) 62. päeval **1.71** Kasv kiirenes.

1.72 a) Läbimüük 14,9 tuh. tk, kasvab kiirusega 1,6 tuh. tk kuus, kasv kiireneb (teine tuletis 0,095); b) Läbimüük 40 tuh. tk, kasvab kiirusega 1,2 tuh. tk kuus, kasv aeglustub (teine tuletis -0,11); c) Maksimaalne kasvukiirus 10,7 kuud hiljem, läbimüük

25 tuh, 50% maksimaalsest. **1.74** $A(W) = \frac{2k}{1-2kW}$; $A'(W) = \frac{4k^2}{(1-2kW)^2} > 0$, kiirus on positiivne, kasvab **1.75** $A = k$, on

konstant. **1.76** $A(W) = \frac{1}{W}$, $A''(W) = -\frac{1}{W^2} < 0$, kiirus on negatiivne, kahaneb. **1.77** a) Osta 10, müüa 25 päeva pärast.

b) 5800 kr **1.78** 100 **1.79** b) 50 c) 51,7 **1.80** a) 314 000 kr; b) 179 000 kr. **1.81** a) 50 000 000 kr, 500 kr; b) 48 000 000 kr, 600 kr.

- 1.82** a) 3 aasta pärast, b) praegu. **1.83** hinnaga 12,5 kr. **1.84** 40. **1.85** ei ole, sest maksimaalne tulu on 200 kasseti korral. **1.86** 3 toodet päevas. **1.87** 8. **1.88** Tootmismahd 947 tk, opt. hind 203,55 kr, maks. kasum 49088 kr. **1.90a)** a) $\sqrt{\frac{pq}{sn}}$.
- 1.91** $7,54 \times 15,06$ cm **1.92** 665 m maa peal piki kallast ja siis vee alt otse tehaseni, kulu on 644700 kr. **1.94** a) suurendada 7,2%; b) vähendada 2,4%; c) vähendada 10,6%. **1.95** a) 500 kr; b) 200 tk, 400 kr. **1.96** a) 24 900 m; b) 124 500 kr; c) 38 874 500 kr; d) võtta vastu, sääst on 162 875 kr aastas. **1.97** a) $\frac{c_s q}{2} + c_s q_0$, kus q on kaubapartii suurus. b) Ei muutu. c) Suurenevad suuruse $c_s q_0$ võrra. **1.98a)** 12, b) 5, c) ca 225 tuh kr **1.99** a) on kasulik, kasum suureneb; b) ei ole, kasum väheneb.
- 1.100** 20 **1.101** a) $q_A = 10; p_A = 110; q_B = 23; p_B = 67,5$; b) $p = 76; q_A = 13,4; q_B = 19,6$; c) 144,5 **1.102** a) 5; b) 5. **1.103** a) 4,3; b) 4,3. **1.104** a) 8. **1.107** a) -0,6; 75 000; 1 125 000 kr; hind 13,5: 79 500; 1 073 250 kr; hind 16,5: 70 500; 1 163 250; b) -1,0; 60 000; 1 200 000 kr; hind 18 kr: 66 000; 1 188 000 kr; hind 22 kr: 54 000; 1 188 000; c) -3,0; 30 000; 900 000 kr; hind 27 kr: 39 000; 1 053 000 kr; hind 33 kr: 21 000; 693 000. **1.108** a) $E^D = \frac{0,1p}{0,1p - 60}$, b) -0,5, mitteelastne nõudlus **1.109** 300 kr.
- 1.110** $E^D = \frac{2p^2}{p^2 - 100}$; b) -1, 125, elastne nõudlus; c) $p \approx 5,77$ kr. **1.113a)** a) Ühikelastne, kui $p = 20$, mitteelastne, kui $0 \leq p < 20$, elastne, kui $20 < p \leq 35$; b) Kasvab, kui $0 \leq p < 20$, kahaneb kui $20 < p \leq 35$, lokaalne maksimum, kui $p = 20$; c) Kasvab, kui $0 \leq p < 20$, kahaneb kui $20 < p \leq 35$, lokaalne maksimum, kui $p = 20$. **1.114** a) Ühikelastne, kui $p = 125$, mitteelastne, kui $0 \leq p < 125$, elastne, kui $125 < p \leq 250$; b) Kasvab, kui $0 \leq p < 125$, kahaneb kui $125 < p \leq 250$, lokaalne maksimum, kui $p = 125$; c) Kasvab, kui $0 \leq p < 125$, kahaneb kui $125 < p \leq 250$, lokaalne maksimum, kui $p = 125$.

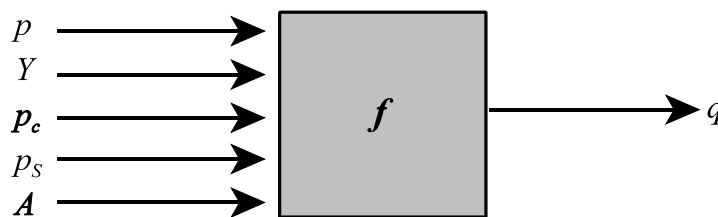
2. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

Mitme muutuja funktsiooni mõiste.

Ühe muutuja funktsioon $y = f(x)$ seob omavahel 2 suurust. Paljudes majandussalastes seostes esinevad korraga aga rohkem kui kaks suurust.

Näiteks

- ▶ ettevõtte tootmiskaht sõltub nii ettevõttesse paigutatud kapitalist kui ka kasutatava tööjõu hulgast;
- ▶ majapidamise tarbimiseelarve sõltub paljude hüviste tarbimiskogustest ja nende hindadest;
- ▶ nõutav kogus q ei sõltu mitte ainult hinnast p , vaid ka tarbija tuludest Y , asenduskauba hinnast p_c , täienduskauba hinnast p_s , reklaamikuludest A .



Joonis 1 Nõutav kogus on mitme muutuja funktsioon

Sellise seose matemaatiline esitusviis on $q = f(p, Y, p_c, p_s, A)$.

NÄIDE 2.1. Tootlikkuse lineaarne mudel.

Tootlikkus on toodangumaht ühe töötaja kohta. Tootlikkuse korrelatsioonanalüüsil leiti, et kõige rohkem mõjutavad ettevõtte X tootlikkust järgmised näitajad:

- ▶ põhivara vanus (aastates) x_1
- ▶ käibesagedus x_2
- ▶ arvutite arv ühe töötaja kohta x_3
- ▶ töötajate keskmine haridustase x_4

Tootlikkuse regressioonanalüüsiks valiti lineaarne mudel $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$. Järelikult, kui põhivara vanus suureneb 1 aasta võrra, siis tootlikkus suureneb a_1 ühikut töötaja kohta. Kui käibesagedus suureneb 1 võrra, siis tootlikkus suureneb a_2 ühikut töötaja kohta.

NÄIDE 2.2. Tarbimisfunktsioon kui mitme muutuja funktsioon

Kui $x_1; x_2; \dots$ ja x_n on hüviste kogused ning $p_1; p_2; \dots; p_n$ vastavad hinnad, mis on konstantsed, siis **tarbimisfunktsioon**

$$Z(x_1; x_2; \dots; x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Mitme muutuja funktsiooni üldkuju on $y = f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$.

n muutuja funktsioon on seos, mis seab igale n järjestatud reaalarvust koosnevale kombinatsioonile $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vastavusse ühe ja ainult ühe reaalarvu

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Lihtsaimad mitme muutuja funktsioonid on kahe muutuja funktsioonid. Edaspidi vaadeldakse kahe muutuja funktsioone ja nende diferentsiaalarvutust. Vastavad mõisted ja arvutused on laiendatavad suvalise n muutuja funktsiooni jaoks.

NÄIDE 2.3. Kogutulu kui kahe muutuja funktsioon

Oletame, et kaupmees müüb kahte sorti leiba. "Madise" leib maksab 8 kr ja "Toolse" leib 6,50 kr. Kui "Madise" leiba müüakse päevas x pätsi ja "Toolse" leiba y pätsi, on summaarne sissetulek ehk tulu päevas

$$R(x, y) = 8x + 6,5y$$

Kahe muutuja funktsioon on seos, mis seab järjestatud arvupaarile $(x; y)$ vastavusse ühe ja ainult ühe reaalarvu $z = f(x; y)$.

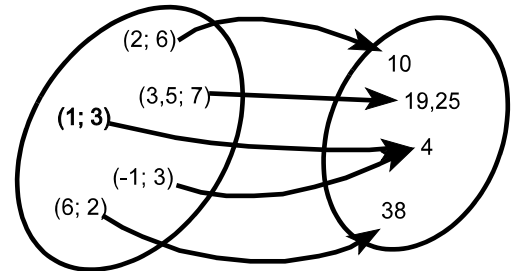
x, y - **argumendid** ehk **sõltumatud muutujad**
 z - **funktsioon** ehk **sõltuv muutuja**

NÄIDE 2.4. Kahe muutuja funktsiooni arvutamine.

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = x^2 + y$.

Leiame funktsiooni väärtused erinevate argumentipaaride korral:

$$\begin{aligned} z(2; 6) &= 2^2 + 6 = 10 \\ z(3,5; 7) &= 3,5^2 + 7 = 19,25 \\ z(-1; 3) &= (-1)^2 + 3 = 4 \\ z(6; 2) &= 6^2 + 2 = 38 \end{aligned}$$



Joonis 2 Kahe muutuja funktsioon kui seos

Kahe muutuja funktsiooni **määramispiirkonnaks** nimetatakse järjestatud arvupaaride hulka, mille korral funktsioon on määratud. Tähistatakse järgmiselt:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{tingimused, millele } x \text{ ja } y \text{ peavad vastama, et funktsiooni saaks arvutada}\}$$

NÄIDE 2.5. Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkonna leidmine

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = \frac{3x^2 + 5y}{x - y}$. Leiame funktsiooni määramispiirkonna D .

Lahendus: Funktsioon on määratud kõigi reaalarvu paaride korral väljaarvatud need, mille korral nimetaja on null,

$x = y: D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$. Geomeetriliselt kujutab määramispiirkond endast xy -tasandit, millest on välja eraldatud sirge $y = x$ (joonis 3).

NÄIDE 2.6. Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkonna leidmine

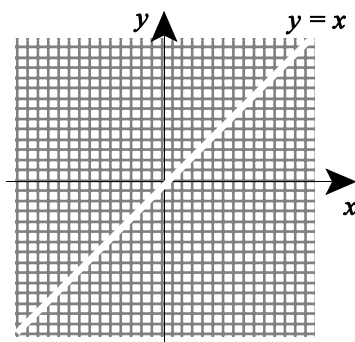
Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z(x; y) = x e^y + \ln x$. Leida funktsiooni määramispiirkond D .

Lahendus: $x e^y$ on määratud kõigi reaalarvude x ja y korral, kuid $\ln x$ on määratud vaid siis, kui $x > 0$. Järelikult määramispiirkond $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ (joonis 4).

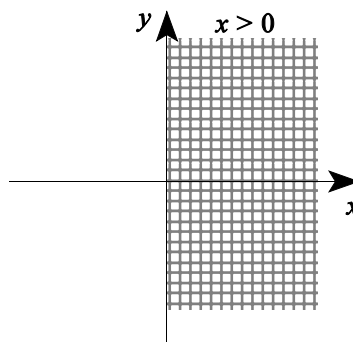
NÄIDE 2.7. Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkonna leidmine.

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z(x; y) = \ln(x^2 - y)$. Leida funktsiooni määramispiirkond D .

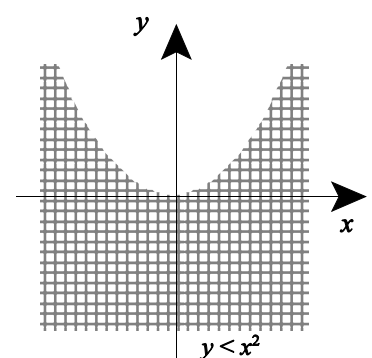
Lahendus: Kuna logaritmi argument peab olema > 0 , siis $x^2 - y > 0$ ja $y < x^2$. Määramispiirkond $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$ (joonis 5).



Joonis 3 Määramispiirkonda ei kuulu sirge $y = x$



Joonis 4 Määramispiirkond on pooltasand $x > 0$



Joonis 5 Määramispiirkond on väljaspool parabooli $y = x^2$

NÄIDE 2.8. Tulu sõltuvus asenduskaupade hindadest

Sportitarvete kaupluses on müügil kahte sorti tennisreketeid. Nõudluse analüüs on näidanud, et kui reketite Chang hinnaks on p_C ja reketite Becker hinnaks p_B , siis reketite Chang nõudlusfunktsioon on

$$q_C = 300 - 20p_C + 30p_B \quad \text{reketit aastas}$$

ja reketite Becker nõudlusfunktsioon

$$q_B = 200 + 40p_C - 10p_B \quad \text{reketit aastas.}$$

Avaldada aasta jooksul reketite müügist saadav tulu funktsioonina reketite hindadest.

Lahendus:

$$\begin{aligned} R(p_C; p_B) &= R_C + R_B = q_C p_C + q_B p_B = \\ &= (300 - 20p_C + 30p_B)p_C + (200 + 40p_C - 10p_B)p_B = \\ &= 300p_C + 200p_B + 70p_C p_B - 20p_C^2 - 10p_B^2 \end{aligned}$$

ÜLESANDED

2.1 24 USA-s toodetava sigaretimargi suitsu analüüs on näidanud, et ühe sigareti suitsus sisalduva süsinikoksiidi kogus z (milligrammides) sõltub sigaretis oleva tõrva kogusest x ja nikotiini kogusest y (mõlemad milligrammides) järgmiselt $z = 0,96x - 2,6y + 3,1$. Sigaretis "Barclay Number One" on tõrva 1 mg ja nikotiini 0,1 mg. Leida, kui palju süsinikoksiidi lendub õhku ühe seda marki sigareti suitsetamisel.

2.2 Ettevõtte analüütikud uurisid, millest sõltub ettevõtte käive Y . Peale statistilist analüüsi leiti, et ettevõtte käivet (tuhandetes kr) kirjeldab mudel, mis sialdab turunduskulusid M (tuh kr), majanduskasvu näitajat E (protsentides) ja ühiku kulude muutust r (protsentides):

$$Y = -2641,57 + 4697,6M + 40,1E - 6,29r.$$

Leida,

- kui palju suureneb käive, kui turunduskulusid suurendada 1 tuh kr ja muud suurused jäävad samaks;
- kui palju suureneb käive, kui turunduskulusid suurendada 2 tuh kr ja muud suurused jäävad samaks;
- kui palju suureneb käive, kui prognoositakse majanduskasvu 5% ja muud suurused jäävad samaks;
- kui palju tuleks alandada kulusid tooteühiku kohta, kui on oodata majanduslangust 0,5% ja käive peaks jääma samaks.

2.3 Kui tootmises osaleb x kogenud töötajat ja y kogemusteta töötajat, siis päevas toodetud kogus avaldub järgmiselt:

$$q = 10x^2y. \text{ Praegu on tööl 20 kogenud ja 40 kogemusteta tööl. Leida}$$

- mitu ühikut toodetakse praegu päevas;
- kui palju suureneb päevane kogus, kui võetakse tööle veel üks kogenud tööline;
- kui palju suureneb päevane kogus, kui võetakse tööle veel üks kogemusteta tööline;
- kui palju suureneb päevane kogus, kui võetakse tööle üks kogenud ja üks kogemusteta tööline.

2.4 Kirjutusmasinaid tootva firma kulud on 1200 krooni ühe elektrilise kirjutusmasina kohta ja 500 krooni ühe mehaanilise kirjutusmasina kohta. Praegu toodetakse kuus 500 elektrilist ja 800 mehaanilist kirjutusmasinat.

- Avaldada tootja kulud funktsioonina elektriliste ja mehaaniliste kirjutusmasinate tootmismahitudest.
- Tootja soovib suurendada elektriliste kirjutusmasinate tootmismahu 50 võrra. Kui palju tuleks mehaaniliste kirjutusmasinate tootmismahu vähendada, et summaarne kulu jääks samaks?

2.5 Ehitusmaterjalide poes müüakse kahe erineva tootjafirma lateksvärvi. Müügiuhi analüüs näitas, et kui ühe tootja värvi müüakse hinnaga p_1 krooni kilogramm ja teist hinnaga p_2 krooni kg, siis kuu aja jooksul ostetakse esimest värvi $760 - 2,9p_1 + 5,8p_2$ kilogrammi ja teist värvi $380 + 1,5p_1 - 2,9p_2$ kilogrammi.

- avaldata lateksvärvide müügist saadav tulu kuus funktsioonina hindadest ;
- leida lateksvärvide müügist saadav tulu, kui esimest värvi müüakse hinnaga 78 kr/kg ja teist hinnaga 65 kr/kg.

2.6 Leida funktsiooni määramispiirkond:

- $z(x; y) = (x - 1)^2 + 2xy^3$;
- $z(x; y) = \frac{3x + 2y}{2x + 3y}$;
- $z(x; y) = \sqrt{y^2 - x^2}$;
- $z(x; y) = \frac{x}{\ln y}$.

2.7 Ettevõtte Y tootlikkust kirjeldab lineaarne mudel $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$, kus x_1 on põhivara vanus, x_2

käibesagedus, x_3 arengu- ja uurimiskulude osatähtsus kogukuludes, x_4 töötajate keskmine palk. Leida, kui palju muutub tootlikkus, kui

- käibesagedus suureneb ühiku võrra ja muud suurused jäävad samaks;
- töötajate keskmine palk suureneb 1% ja muud suurused jäävad samaks.

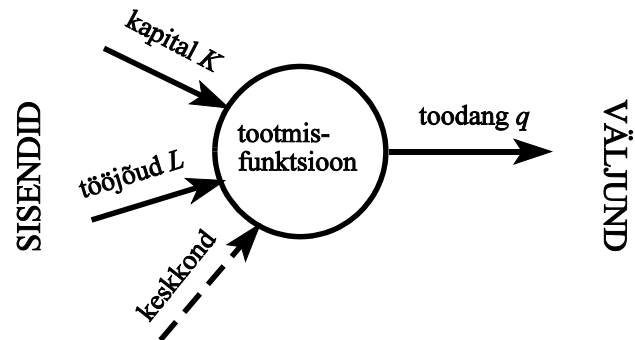
2.8 Näidata, et kui $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ ning x_1 muutub Δx_1 võrra ja x_2 muutub Δx_2 võrra, siis y muutub $\Delta y = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2$ võrra.

Tootmisfunktsioon

Firmateooria (*theory of firm*) tegeleb hüviste pakkumise teoreetiliste alustega, kus modelleeritavaks objektiks on ettevõtte (firma). **Ettevõtte mudel** kajastab ettevõtja valikuid optimaalse lahenduse leidmisel mitmesuguste kitsenduste korral. Firmateoorias on **ettevõtte põhieesmärgiks** kasumi maksimeerimine, alameesmärgiks kulude minimeerimine.

Hüviste tootmiseks vajab firma mitmesuguseid **tootmistegureid**, mis on tootmisprotsessi **sisenditeks**. Näiteks:

- ▶ hooned;
- ▶ seadmed;
- ▶ tooraine ja materjalid;
- ▶ teenused;
- ▶ maa;
- ▶ inimtöö;
- ▶ kapital;
- ▶ keskkond.



Joonis 6 Tootmisfunktsioon, selle sisendid ja väljund

Tihti vaadeldakse vaid kahte tootmissisendit: kapital K ja tööjõud L (mõõdetakse tavaliselt töötundides või töötajates). Viimasel ajal lisatakse mõnikord ka keskkond kui jääkproduktide vastuvõtja.

Toodangu maht q sõltub lisaks tootmissisendite suuruselt ka tehnoloogiast A .

Tootmisfunktsioon näitab maksimaalset toodangut, mida on võimalik toota erinevate võimalike tootmissisendite kombinatsioonidega

Tootmisfunktsiooni üldkuju:

$$q = q(K, L, A)$$

kus K on kapital, L tööjõud ja A tehnoloogiast sõltuv konstant.

Makroökonomikas kasutatakse tootmisfunktsiooni majanduskasvu mudelite uurimisel ja sellisel juhul on kogutoodanguks näiteks riigi sisemajanduse koguprodukt (SKT).

Vaatleme erinevaid tootmisfunktsiooni tüüpe.

I Olgu tootmisprotsess selline, et ühe tooteühiku tootmiseks on vaja 1 tööpinki ja 2 töölist. Kui firmal on 2 tööpinki ja 2 töölist, siis üks tööpink seisab. Et toota 2 ühikut, on vaja 2 tööpinki ja 4 töölist.

Kahe sisendi, tööpinkide ja tööliste proportsioonid on fikseeritud. Üldiselt, kui firmal on z_1 tööpinki

ja z_2 töölist, siis võimalik tooteühikute arv on vähim suurustest z_1 ja $\frac{z_2}{2}$:

$$q = \min\left(z_1, \frac{z_2}{2}\right)$$

Toodangu mahtu piirab kõige defitsiitsem tegur, asendada seda pole võimalik. Seda tegurit suurendades üle teatud piiri aga ilmneb, et toodangu mahtu hakkab piirama mõni muu tegur. Kahe sisendi korral on fikseeritud ehk **püsiproportsioonidega tootmisfunktsiooni** üldkuju

$$q = \min\left(\frac{z_1}{a_1}; \frac{z_2}{a_2}\right).$$

Et toota üht tooteühikut, on vaja a_1 ühikut sisendit 1 ja a_2 ühikut sisendit 2.

Püsiproportsioonidega tootmisfunktsiooni korral:

- ▶ tegurite asendamine pole võimalik, igale toodangumahule vastab vaid üks tehniliselt efektiivne tootmistehnoloogia (tehniliselt efektiivne: kõik sisendid on täielikult ära kasutatud);
- ▶ iga teguri vähim võimalik panus on proportsionaalne toodangu mahuga.

Selliseid tootmisfunktsioone nimetatakse ka **Leontieffi tootmisfunktsioonideks**¹ (*Leontieff production function*).

II On olemas aga tehnoloogiaid, mis kasutavad täielikult asendatavaid sisendeid. Näiteks ühe hamburgeri tootmiseks võib kasutada kas 100g Eesti veiseliha või 100 grammi Taani veiseliha. Samuti võib võtta 50g Eesti veiseliha ja 50g Taani veiseliha või muid kombinatsioone, mille summa on 100g. Kui z_1 on Eesti veiseliha kogus ja z_2 Taani veiseliha kogus, siis tootmisfunktsiooni võib kirja panna kujul:

$$q(z_1, z_2) = z_1 + z_2$$

100 grammi Eesti veiseliha võime alati asendada 100 grammi Taani veiselihaga, ükskõik, kui palju me hamburgereid ka ei tooda. Asendusmäär on antud juhul 1:1.

Uurides poes kassapidajate töökiirust, võib selguda, et kogenud kassapidaja teenindab 80 ostjat tunnis ja algaja kassapidaja 40 ostjat tunnis. Ühes tunnis teenindatud ostjate arv on siis

$$q(z_1, z_2) = 80z_1 + 40z_2$$

kus z_1 on kogenud kassapidajate arv ja z_2 algajate kassapidajate arv. Asendusmäär on antud juhul 1:2.

Selliste tehnoloogiate puhul on tegemist sisendtegurite **konstantse asendusmääraga**. Üldjuhul

$$q(z_1, z_2) = a_1 z_1 + a_2 z_2$$

Konstantse asendusmääraga tootmisfunktsiooni korral

- ▶ kaks tegurit on omavahel täielikult asendatavad konstantse asendusmääraga;
- ▶ kõik sisendikomplektid on tehniliselt efektiivsed.

III Enamike tehnoloogiate korral võib sisendteureid üksteisega asendada, kuid mitte konstantse asendusmääraga.

Oletame, et tööline võib 1 tunni jooksul tööpingi abil toota 100 tooteühikut, kasutades 100 tooraineühikut. Tõstes tööpingi töökiirust, võib toota 45 minutiga sama hulga tooteid, kuid kasutades nüüd juba 150 tooraineühikut, sest osa toorainet jääb kõrvale kui kõlbmatu (antud töötlemiskiiruse juures). 15 minutit asendati 50 tooraineühikuga. Tõstes tööpingi töökiirust veelgi, võib 100 toote tootmiseks kulutatavat aega lühendada veel 15 minutit, kuid vaja on veel kvaliteetsemat toorainet ja kõlbmatuna jääb kõrvale juba kolmest kaks, vaja on 300 ühikut toorainet. Sellise töökiiruse juures kulub 15 minuti tööaja asendamiseks 150 tooraineühikut. Siin tööjõu ja tooraine asendamise määr muutub.

Sellist tüüpi tootmisfunktsioone, mis modelleerivad tehnoloogilisi protsesse, kus sisendtegurite asendatavuse määr on muutuv suurus, kirjeldatakse tihti funktsiooniga, mida nimetatakse **Cobb-Douglas'e tootmisfunktsiooniks**²:

$$q(z_1, z_2) = A z_1^\alpha z_2^\beta$$

¹Wassili Leontief, Nobeli majanduspreemia laureaat, sisend-väljundmodelite teooria rajaja.

²Cobb, D., Douglas, P. American Economic Review 18, 1928.

Siin A , α ja β on positiivsed konstandid ($0 < \alpha < 1$ ja $0 < \beta < 1$), mis iseloomustavad vastavat majandusüksust või tootmisharu.

Seega tootmisfunktsiooni kuju sõltub sellest, kas tootmistegurite asendamise piirmäär on

- ▶ null;
- ▶ konstantne;
- ▶ muutuv.

Cobb-Douglase tootmisfunktsiooni nimetatakse ka **neoklassikaliseks tootmisfunktsiooniks** ja seda kasutatakse nii firmateoorias (vt. näiteks Vensel, V. Tootmis- ja kasvufunktsioonid. Tallinn, 1979.) kui ka makroökonomikas (vt. Kerem, K., Listra, E., Luiker, L. Pöder, K. Makroökonomika teooria ja mudelid. Tallinn, 1998. Lk. 35).

NÄIDE 2.9. Tootmisfunktsioon autotööstuses

Kasutades andmeid (varad, töötajate arv ja käive) 20 maailma suurima autotootja kohta (Postimees, 19. aprill 1999), on mitmese regressiooni abil leitud vastav tootmisfunktsioon

$$q = 7,40 K^{0,674} L^{0,130}$$

kus q on käive (mld USD), K varad (mld USD) ja L töötajate arv.

NÄIDE 2.10. Tootmisfunktsioon USA makroökonomilise tootmisfunktsiooni parameetrid erinevatel ajajärgudel. Leitud erinevate autorite poolt.

Aastad	α	β	$\alpha + \beta$	Autor
1899-1922	0,25	0,75	1,00	Douglas
1904	0,31	0,65	0,96	Douglas
1919	0,25	0,76	1,01	Douglas
1900-1953	0,16	0,84	1,00	Klein

Kuna parameetrite α ja β summa on enamasti ühe lähedane, kasutataksegi tihti tootmisfunktsiooni kujul

$$q(K, L) = A K^\alpha L^{1-\alpha}$$

NÄIDE 2.11. Tootmisfunktsioon

Ettevõtte tootmise analüüs on näidanud, et tootmisfunktsioon avaldub kujul $q(K; L) = 60 K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$, kus q on tootmismahut kuus, K investeeritud kapital ja L kasutatav töötundide hulk kuus. Leida tootmismahut, kui tootmisesse on investeeritud 512000 krooni ja kuus tehakse tööd 1000 töötundi.

Lahendus:

$$q(512000; 1000) = 60 \cdot 512000^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}} = 480000$$

Vastus: Antud kapitali ja tööjõu väärtuste korral on tootmismahut 480 000 ühikut kuus.

Toodangu hulka tööjõu ühiku kohta nimetatakse **tööjõu tootlikkuseks**:

$$y_L = \frac{q}{L}$$

Tehes järgmised teisendused

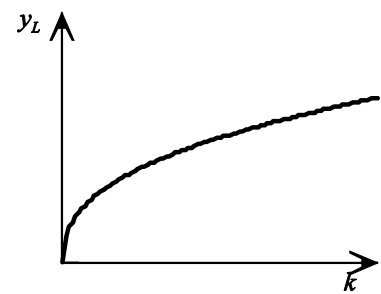
$$\frac{q}{L} = \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = AK^\alpha L^{-\alpha} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$$

ja tähistades kapitalimahutusi ühe töötaja kohta $k = \frac{K}{L}$, saame tööjõu tootlikkuse jaoks järgmise avaldise:

$$y_L(k) = Ak^\alpha$$

Tööjõu tootlikkus sõltub kapitalimahutustest ühe töötaja kohta ja tehnoloogiast. Analüüsime, kuidas muutub tööjõu tootlikkus, kui me suurendame kapitalimahutusi ühe töötaja kohta. Selleks leiame, millise märgiga on I ja II tuletis:

$$\begin{aligned} \frac{dy_L}{dk} &= A\alpha k^{\alpha-1} > 0; \\ \frac{d^2y_L}{dk^2} &= A\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0. \end{aligned}$$



Joonis 7 Tööjõu tootlikkuse sõltuvus kapitalimahutustest ühe töötaja kohta

I tuletis on positiivne, seega kiirus on positiivne, tööjõu tootlikkus kasvab, kui me suurendame kapitalimahutusi ühe töötaja kohta. II tuletis on negatiivne, tegemist on kumera graafikuga ja kasvu kiirus väheneb, kasv aeglustub (joonis 7).

Toodangu hulka kapitali ühiku kohta nimetatakse **kapitalitootlikkuseks**:

$$y_K = \frac{q}{K}$$

ÜLESANDED

2.9 Millist tüüpi tootmisfunktsiooniga on tegemist? Panna kirja vastava tootmisfunktsiooni kuju.

- Arvutite koostamisel võib ühte arvutisse panna ühe 64 megabaidise mäluikiibi või kaks 32 megabaidist mäluikiipi;
- Ekskursiooni jaoks on vaja 2 bussijuhti, 1 ekskursioonijuhti ja 1 bussi.
- Loengupidamiseks on vaja 1 õppejõudu ja 1 auditooriumi.

2.10 Kasutades näites 2.9 toodud autotööstuse tootmisfunktsiooni, leida

- kui suur oli BMW käive 1998. a., kui varasid oli 29629 mld USD ja töötajaid 118 tuhat. Teades, et käibe tegelik väärtus oli 34692 mld USD, leida mudeli suhteline viga.
- kui suur oli Nissan Motor Co. käive 1998. a., kui varasid oli 59121 mld USD ja töötajaid 137 tuhat. Teades, et käibe tegelik väärtus oli 53478 mld USD, leida mudeli suhteline viga.

2.11 Firma X tootmisfunktsioon sõltub kapitalist K ja tööjõust L järgmiselt $q = 120K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. Mis juhtub kogutoodanguga, kui

- kapital suureneb kaks korda;
- nii kapital kui ka töötajad suurenevad kaks korda;
- nii kapital kui ka töötajad vähenevad poole võrra?

2.12 Firma X tootmisfunktsioon sõltub kapitalist K ja tööjõust L järgmiselt $q = 60K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. Mis juhtub kogutoodanguga, kui

- töötajad väheneb 2 korda;
- kapital ja töötajad suurenevad 1,5 korda?

2.13 Olgu meil tööjõu väärtus teatud perioodil konstantne, $L = L_1$ ja tootmisfunktsioon sõltub ainult kapitalist K :

$q(K) = AL_1^{1-\alpha}K^\alpha$, kus A ja α on positiivsed konstandid, $0 < \alpha < 1$. Näidata, et tootmisfunktsioon on kasvav ja kumer kogu määramispiirkonnas.

2.14 Näidata, et suurendades kapitalimahutusi ühe töötaja kohta, kapitalitootlikkus kahaneb ja kahanemine aeglustub.

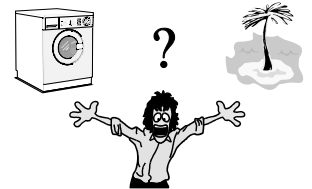
Kasulikkusfunktsioon.

Majapidamisteooria uurib tarbimiseks kasutatavate hüviste nõudluse kujunemise seaduspärasusi. Paralleelselt terminiga majapidamisteooria kasutatakse ka nimetusi **tarbija käitumise teooria** (*consumer behavior theory*) ja **hüviste nõudluse teooria** (*demand theory*).

Majapidamise moodustavad tarbivad majandussubjektid, kellel on ühine eelarve ja ühine kava sissetulekute saamiseks ning hüviste tarbimiseks. Majapidamisteooria peaeesmärgiks on tarbija turukäitumise prognoosimine. Selleks püütakse selgitada tarbija käitumise põhjusi. Lähte-eeldusi on kaks

- ▶ inimesed soovivad oma vajadusi võimalikult paremini rahuldada;
- ▶ nad oskavad võimalike alternatiivide hulgast valida parima.

Alternatiivideks on erinevate hüviste fikseeritud koguste komplektid, kusjuures valiku tegemisel on olulised need komplektid, mis on tarbijale kättesaadavad hüviste hindade ja oma sissetuleku juures. Valiku tegemisel valitakse see komplekt, mis tagab kõrgema kasulikkustaseme ehk kõrgema rahulolu.



Kasulikkustaseme ehk rahulolu mõõduks kasutatakse **kasulikkusfunktsiooni**. Kõige sagedamini modelleeritakse kogukasulikkust Cobb-Douglaste kasulikkusfunktsiooni abil (*Cobb-Douglas utility function*). Lihtsaimal juhul piirduakse kahe hüvisega:

$$u(x_1; x_2) = x_1^a x_2^b$$

kus x_1 ja x_2 on hüviste tarbimiskogused ja a ning b konstandid.

Kasulikkusfunktsiooni arvvärtus ei ole hästi interpreteeritav. Seda kasutatakse aga erinevate hüvistekomplektide kasulikkuste võrdlemisel. Näiteks ei ütle meile midagi see, et ühe šokolaadi söömisel saadav rahulolu on 45 ühikut. Kui me aga teame, et kahe šokolaadi söömisel saadav rahulolu on 70 ühikut, siis me saame väita, et kahe šokolaadi kogukasulikkus on suurem.

Kasulikkusfunktsioon on üldiselt individuaalne, see tähendab, et näiteks üks inimene võib šokolaadi söömisest saada suuremat rahulolu kui teine.

Kasulikkusfunktsiooni kasutades saame formuleerida **majapidamise turukäitumise põhieesmärgi**: see on kogukasulikkuse funktsiooni maksimeerimine antud eelarve korral.

ÜLESANDED

2.15 Olgu kasulikkusfunktsiooni kuju $u(x_1; x_2) = x_1^{0,2} x_2^{0,5}$, kus x_1 ja x_2 on hüviste 1 ja 2 kogused. On valida kahe kombinatsiooni vahel. Esimesel juhul on hüvise 1 kogus 10 ühikut ja hüvise 2 kogus 7 ühikut. Teisel juhul on hüvise 1 kogus 8 ühikut ja hüvise 2 kogus 9 ühikut. Kumba kombinatsiooni korral on tarbija rahulolu suurem?

2.16 Olgu kasulikkusfunktsiooni kuju $u(x_1; x_2) = x_1^{0,3} x_2^{0,8}$, kus x_1 ja x_2 on hüviste 1 ja 2 kogused. On valida kahe kombinatsiooni vahel. Esimesel juhul on hüvise 1 kogus 100 ühikut ja hüvise 2 kogus 50 ühikut. Teisel juhul on hüvise 1 kogus 50 ühikut ja hüvise 2 kogus 64,8 ühikut. Kumba kombinatsiooni korral on tarbija rahulolu suurem?

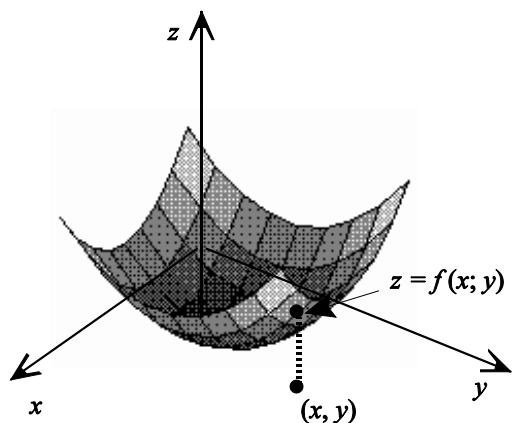
2.17 Olgu kasulikkusfunktsiooni kuju $u(x_A; x_B) = x_A^{0,4} x_B^{0,2}$, kus x_A ja x_B on hüviste A ja B kogused. Praegu tarbitakse hüvist A 20 ühikut ja hüvist B 7 ühikut. Leida, milline peab olema seos hüviste koguste vahel, et kasulikkus ei muutuks. Kui hüvist B tarbida 20 ühikut, mitu ühikut peaks tarbima hüvist A, et kasulikkuse tase jääks samaks?

Kahe muutuja funktsiooni graafik ja nivoojooned.

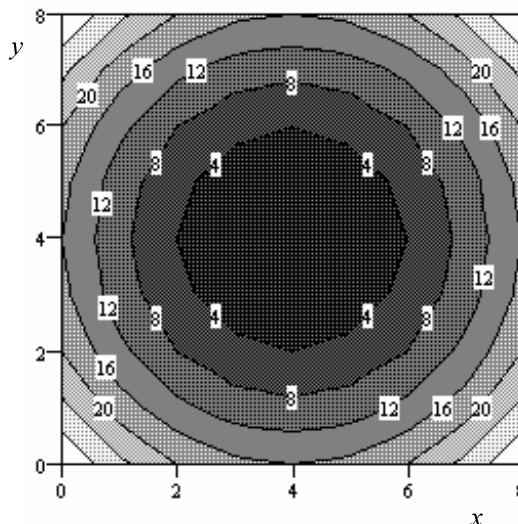
Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x; y)$ graafikuks on pind 3-mõõtmelises ruumis. Argumendipaar (x, y) on punkt xy -tasandil ja funktsioon z "kõrgus" selles punktis.

NÄIDE 2.12. Kahe muutuja funktsiooni graafik

Joonisel 9 on toodud funktsiooni $z = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ graafik. Funktsiooni väärtus on võrdne kaugusega xy -koordinaattasandist. Punktis $(4; 4)$ funktsioon $z = 0$ ja selles punktis pind puudutab seda tasandit. See on lokaalne miinimum.



Joonis 9 Kahe muutuja funktsiooni graafikuks on pind



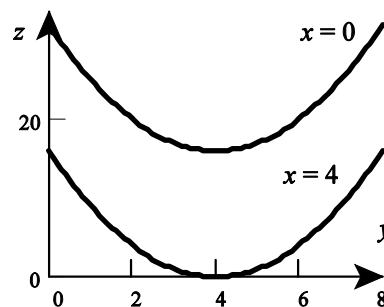
Joonis 10 Kahe muutuja funktsiooni nivoojooned.

Funktsiooni graafiku uurimisel on otstarbekas uurida lõikejooni erinevate tasanditega. Neid lõikejooni nimetatakse **tasandilõigeteks**.

Nivoojooned on kahe muutuja funktsiooni graafiku lõikejooned tasandiga $z = \text{const}$. Minge konkreetse nivoojoone võrrand saadakse, kui funktsioonile z antakse mingi konkreetne väärtus. Joonisel 10 on toodud eespool vaadeldud funktsiooni nivoojooned, milleks antud juhul on kontsentrilised ringjooned ühise keskpunktiga punktis $(4; 4)$. Joontel olevad numbrid tähistavad funktsiooni väärtust piki seda joont. Nivoojooned saadakse, kui antakse funktsioonile konstantsed väärtused. Näiteks $z = 4$ korral saadakse ringjoon võrrandiga $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$, mille keskpunkt on punktis $(4; 4)$ ja raadius on 2. Väärtuse $z = 8$ korral ringjoon $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 8$. Lisaks on funktsiooni väärtuse muutus esitatud heleduse muutusena. Võib tuua analoogia geograafilise kaardiga, kus kõrgused on esitatud erineva värviga.

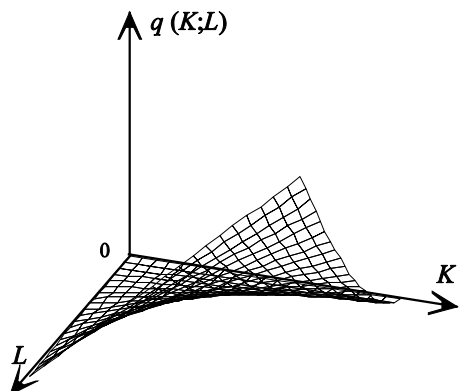
Võib vaadelda ka lõikejooni tasandiga $x = \text{const}$ ja tasandiga $y = \text{const}$.

Võttes avaldises $z = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ muutuja x võrdseks nulliga, saame $z = y^2 - 8y + 32$, mis on parabooli võrrand. Vastav joon on toodud joonisel 11. Kui aga $x = 4$, on joone võrrandiks $z = y^2 - 8y + 16$.

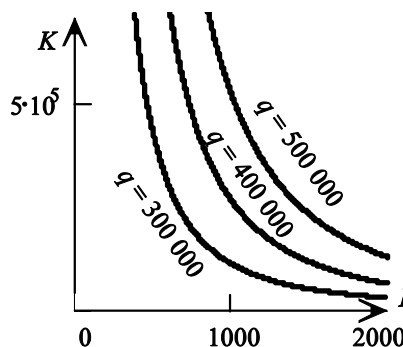


Joonis 11 Lõikejooned tasandiga $x = \text{const}$

Tootmisfunktsiooni korral nimetatakse jooni, mille korral toodangumaht on konstantne, **tootmisfunktsiooni isokvantideks** ehk **samatoodangukõverateks**. Samatoodangukõver võimaldab leida selliseid kaptali K ja tööjõu L väärtuste paare, mille korral kogutoodang võrdub etteantud väärtusega.



Joonis 12 Tootmisfunktsiooni graafik



Joonis 13 Samatoodangukõverad

NÄIDE 2.13. Samatoodangukõverad.

Leiame tootmisfunktsiooni $q(K;L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ samatoodangukõverad.

Olgu toodang konstantne, $q = C$. Tootmisfunktsiooni avaldisest avaldame K :

Andes konstandile C erinevaid väärtusi, saame samatoodangukõverad erineva tootmismahu juures. See avaldis annab meile

$$\begin{aligned} 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} &= C && \text{tõstame mõlemad pooled kuupi} \\ 60^3 KL^2 &= C^3 \\ K &= \frac{C^3}{216000L^2} \end{aligned}$$

samatoodangukõverate parve.

Kasulikkusfunktsiooni korral nimetatakse nivoojooni **samakasulikkuse joonteks**. Nende abil on võimalik leida hüviste koguste paare, mille korral kasulikkus jääb samaks.

NÄIDE 2.14. Samakasulikkuse jooned

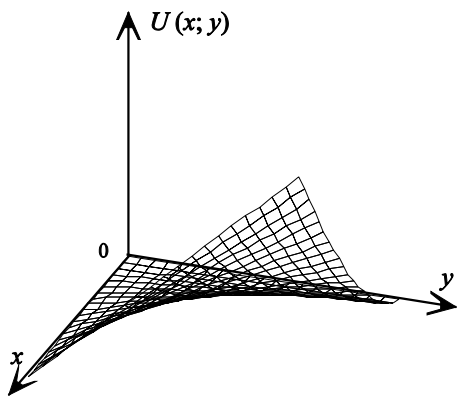
Olgu tarbija kasulikkusfunktsioon $U(x;y) = x^{\frac{3}{2}}y$, kus x ja y on kahe hüvise tarbimiskogused. Funktsiooni graafik on toodud joonisel 14.

Leiame kasulikkusfunktsiooni väärtuse, kui hüvist X tarbitakse 14 ühikut ja hüvist Y 1 ühik:

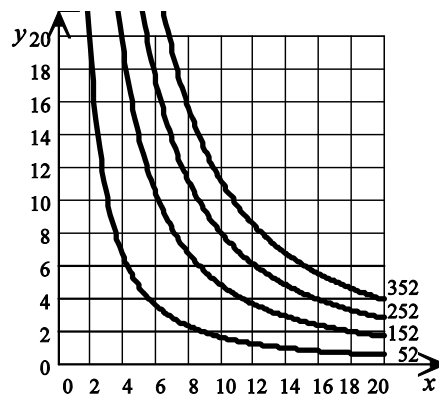
$$14^{\frac{3}{2}} \cdot 1 \approx 52$$

Leiame vastava samakasulikkuse joone, st. joone, mille korral kasulikkus on konstantne:

$$\begin{aligned} U(x;y) &= 52 \\ x^{\frac{3}{2}}y &= 52 && | \cdot x^{-\frac{3}{2}} \\ y &= 52x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



Joonis 14 Kasulikkusfunktsioon



Joonis 15 Samakasulikkuse jooned

Seega vastava samakasulikkuse joone võrrand on $y = 52x^{-\frac{3}{2}}$. Joonisel 15 kujutab seda kõver, mille juures on arv 52. Liikudes piki seda joont, võime leida tarbimiskoguste paare, mille korral kasulikkus jääb samaks.

Seejärel suurendame kasulikkust 100 ühiku võrra ja saame uue joone võrrandiga $y = 152x^{-\frac{3}{2}}$. Analoogiliselt on leitud teised samakasulikkuse jooned.

ÜLESANDED

2.18 Leida samaväärsusjoone võrrandid $z(x;y) = C$ etteantud konstandi väärtuste korral.

- a) $z(x;y) = x + 2y$; $C = 1, C = -3$;
- b) $z(x;y) = x^2 + y$; $C = 0, C = 4$;
- c) $z(x;y) = xy$; $C = 1, C = -1$;

$$d) z(x,y) = ye^x ; C=0, C=1 ;$$

$$e) z(x,y) = xe^y ; C=1, C=e.$$

2.19 Toode koosneb kahest komponendist, mille kogused on vastavalt a ja b . Kulufunktsioon avaldub järgmiselt: $C(a,b) = 20a + 30b + 5000$. Leida samakulujoone võrrand ilmutamata ja ilmutatud kujul.

2.20 Turu analüüs on näidanud, et loomaliha nõudlus sõltub loomaliha hinnast p_l ja sealiha hinnast p_s järgmiselt: $q_l = 800 + 2p_s - 4p_l$. Leida seos hindade vahel konstantse nõudluse korral.

2.21 Firma X tootmisfunktsioon avaldub kujul $q(K,L) = 200K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, kus K on kapital ja L tööjõud. Leida isokvandi võrrand ilmutatud kujul.

2.22 Firma X tootmisfunktsioon avaldub kujul $q(K,L) = 300K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, kus K on kapital ja L tööjõud. Leida isokvandi võrrand ilmutatud kujul.

Osatuletised

Mitmete probleemide korral on vaja leida kahe muutuja funktsiooni muutumise kiirust ühe argumenti suhtes, kui teine argument jääb konstantseks. Sellise kiiruse leidmiseks tuleb leida funktsiooni tuletis ühe argumenti suhtes, kui teine argument on konstantne. Sellist tuletist nimetatakse **osatuletiseks**.

Olgu z kahe muutuja funktsioon, $z = f(x, y)$.

1. Funktsiooni z **osatuletis muutuja x suhtes** on funktsiooni z tuletis muutuja x suhtes, kui y lugeda konstandiks:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx} \Big|_{y=const}$$

2. Funktsiooni z **osatuletis muutuja y suhtes** on funktsiooni z tuletis muutuja y suhtes, kui x lugeda konstandiks:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dy} \Big|_{x=const}$$

Kasutatakse ka tähistusi $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ ja $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Osatuletis on majandusteoorias kasutatava printsiibi *ceteris paribus* (lad. ülejäänud jääb samaks) matemaatiline väljendus.

NÄIDE 2.15. Osatuletiste leidmine

Leiame funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y , kui $z(x,y) = x^2 + y^3 + 2x + 3y$.

a) Et leida osatuletist muutuja x järgi, loeme suuruse y võrdseks konstandiga, $y = C$:

$$z(x) = x^2 + C^3 + 2x + 3C$$

Leiame tuletise x järgi, pidades silmas, et konstandi tuletis on null:

$$z_x = 2x + 0 + 2 + 0 = 2x + 2$$

b) Et leida osatuletist muutuja y järgi, loeme suuruse x võrdseks konstandiga, $x = C$:

$$z(y) = C^2 + y^3 + 2C + 3y$$

Leiame tuletise suuruse y järgi, pidades silmas, et konstandi tuletis on null:

$$z_y = 0 + 3y^2 + 0 + 3 = 3y^2 + 3$$

NÄIDE 2.16. Osatuletiste leidmine

Leiame funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y , kui $z(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$.

a) Et leida osatuletist muutuja x järgi, loeme suuruse y võrdseks konstandiga, $y = C$:

$$z(x) = x^2 + 2xC^2 + \frac{2C}{3x} = x^2 + 2C^2x + \frac{2C}{3}x^{-1}.$$

Leiame tuletise x järgi:

$$z_x = 2x + 2C^2 + \frac{2C}{3}(-1)x^{-2}$$

Asendame konstandi C uuesti muutujaga y :

$$z_x = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3}x^{-2} = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2}$$

b) Et leida osatuletist muutuja y järgi, loeme suuruse x võrdseks konstandiga, $x = C$:

$$z(y) = C^2 + 2Cy^2 + \frac{2y}{3C} = C^2 + 2Cy^2 + \frac{2}{3C}y.$$

Leiame tuletise y järgi:

$$z_y = 0 + 2C \cdot 2y + \frac{2}{3C}.$$

Asendame konstandi C uuesti muutujaga x :

$$z_y = 4xy + \frac{2}{3x}.$$

Tavaliselt teise argumendi asendamist konstandiga eraldi välja ei kirjutata, vaid tuletise võtmisel lihtsalt arvestatakse seda.

NÄIDE 2.17. Osatuletiste leidmine

Leiame funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y , kui $z(x,y) = 3x^3 + 2xy + y$.

Leiame osatuletise argumendi x järgi, vaadeldes muutujat y konstandina:

$$z_x = 9x^2 + 2y$$

Leiame osatuletise argumendi y järgi, vaadeldes muutujat x konstandina:

$$z_y = 2x + 1$$

NÄIDE 2.18. Osatuletiste leidmine

Leiame funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y , kui $z(x,y) = (x^2 + xy + y)^5$.

Leiame osatuletise argumendi x järgi, vaadeldes muutujat y konstandina ja kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit:

$$z_x = 5(x^2 + xy + y)^4(2x + y)$$

Leiame osatuletise argumendi y järgi, vaadeldes muutujat x konstandina ja kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit:

$$z_y = 5(x^2 + xy + y)^4(x + 1)$$

NÄIDE 2.19. Osatuletiste leidmine

Leiame funktsiooni z osatuletised z_x ja z_y , kui $z(x,y) = xe^{-2xy}$.

Leiame osatuletise argumendi x järgi, vaadeldes muutujat y konstandina ja kasutades korrutise diferentseerimise reeglit:

$$z_x = e^{-2xy} + x(-2ye^{-2xy})$$

Leiame osatuletise argumendi y järgi, vaadeldes muutujat x konstandina ja kasutades konstandiga korrutamise reeglit:

$$z_y = x(-2xe^{-2xy}) = -2x^2e^{-2xy}$$

NÄIDE 2.20. Kogutulu muutumise kiirus ühe või teise kauba hinna muutumisel.

Näites 1.1 lk. 48 leiti sporditarvete poe reketite müügist saadava tulu sõltuvus reketite hindadest:

$$R(p_C; p_B) = 300p_C + 200p_B + 70p_Cp_B - 20p_C^2 - 10p_B^2$$

kus reketite Chang hinnaks on p_C ja reketite Becker hinnaks p_B . Praegu on reketite Chang hind 12\$ ja reketite Becker hinnaks 10\$. Leida, kumma reketi hinda tõstes suureneb tulu kiiremini.

Lahendus: Tulu muutumise kiirust ühe või teise hinna muutumise korral näitavad osatuletised. Tuleb leida tulufunktsiooni osatuletised kohal (12; 10).

Osatuletised:

$$\frac{\partial R}{\partial p_C} = 300 + 70p_B - 40p_C$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_B} = 200 + 70p_C - 20p_B$$

Osatuletiste väärtused antud hindade korral

$$\frac{\partial R}{\partial p_C} = 300 + 70 \cdot 10 - 40 \cdot 12 = 520$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_B} = 200 + 70 \cdot 12 - 20 \cdot 10 = 840$$

Vastus: Kui tõsta reketite Chang hinda 1\$ võrra ja reketite Becker hind jääb samaks, suureneb kogutulu 520\$. Kui tõsta reketite Becker hinda 1\$ võrra ja reketite Chang hind jääb samaks, suureneb kogutulu 840\$. Järelikult reketite Becker hinna tõstmine suurendab kogutulu rohkem.

ÜLESANDED

2.23 Leida funktsiooni osatuletised:

a) $z = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$;

b) $z = 5x^2y + 2xy^3 + 3y^2$;

c) $z = 5x + 2x^2 + 3xy + 4xy^2 - 6y + 10$;

2.24 Leia funktsiooni osatuletised:

a) $z = (3x + 2y)^5$;

b) $z = (6x + 7y)^3$;

c) $z = (x^2 + 4y)^2$;

d) $z = (x + xy + y)^3$;

e) $z = \frac{3y}{2x}$;

f) $z = \frac{x^2}{y^3}$;

g) $z = xe^{xy}$;

h) $z = xye^x$;

i) $z = \frac{e^{2-x}}{y^2}$;

j) $z = xe^{x+2y}$;

k) $z = \frac{2x+3y}{y-x}$;

l) $z = \frac{xy^2}{x^2y^3+1}$;

m) $z = x \ln y$;

n) $z = x \ln xy$.

Tarbimismudel

Lihtsaimas **tarbimismudel**is jaguneb rahvatulu (*income*) Y kaheks komponendiks:

$$Y = C + G,$$

kus C on tarbimiskulud (*consumption*) ja G - valitsuskulud (*government expenditures*). Seda avaldist nimetatakse ka **tasakaalunõudeks**.

Tarbimine C sõltub omakorda aga rahvatulust, $C = f(Y)$.

Tarbimise piirkaldvus MPC (*marginal propensity to consume*), näitab, kui palju suureneb tarbimine rahvatulu suurenemisel 1 ühiku võrra, eeldusel et teised tingimused ei muutu (*ceteris paribus*). Järelikult on tarbimise piirkaldvus tarbimisfunktsiooni C tuletis rahvatulu Y järgi:

$$MPC = \frac{\partial C}{\partial Y}$$

Tithi esitatakse seos tarbimise sõltuvus rahvatulust lineaarsel kujul, mida tuntakse ka **Keynesi tarbimisfunktsioonina**:

$$C = C_0 + aY .$$

Sellisel juhul tarbimise piirkalduvus

$$MPC = \frac{\partial C}{\partial Y} = a .$$

Keynesi postulaadi järgi on tarbimise piirkalduvus 0 ja 1 vahel, sageli $a = 0,8$. Vabaliige C_0 Keynesi tarbimisfunktsioonis on tarbimistase sissetulekute puudumisel, autonoomne tarbimine.

Asendades lineaarse tarbimisfunktsiooni rahvatulu avaldisse, saame

$$Y = C_0 + aY + G .$$

Avaldame rahvatulu Y

$$\begin{aligned} Y - aY &= C_0 + G \\ Y(1 - a) &= C_0 + G \\ Y &= \frac{1}{1 - a} C_0 + \frac{1}{1 - a} G \end{aligned}$$

Leiame rahvatulu osatuletise valitsuskulude järgi

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - a}$$

Suurust $M = \frac{1}{1 - a}$ nimetatakse sageli **multiplikaatoriks** (*multiplier*) ehk **võimendiks**, mis näitab, kuidas tomuvad muutused tasakaalustatud süsteemis mõne süsteemi osa muutumise tulemusena. Kui näiteks tarbimise piirkalduvus $a = 0,8$, siis $M = \frac{1}{1 - 0,8} = 5$, mis tähendab, et valitsuskulude suurendamiseks 1 miljoni krooni võrra peab rahvatulu suurenema 5 miljoni krooni võrra.

Täiuslikuma mudeli korral lisanduvad tasakaaluseosesse investeeringud (*investment*) I , eksport (*exports*) X ja import (*imports*) Z :

$$Y = C + I + G + (X - Z) .$$

ÜLESANDED

2.25 Olgu tarbimise piirkalduvus 0,7. Kui palju peab suurenema rahvatulu, et valitsuskulusid suurendada 1,5 miljoni krooni võrra?

2.26 Olgu tarbimismudelisse sisse võetud ka investeeringud: $Y = C + I + G$. Tarbimine ja investeeringud sõltuvad mõlemad rahvatulust: $C = C_0 + 0,7Y$, $I = I_0 + 0,2Y$.

a) Leida, kui palju tuleb suurendada rahvatulu, et valitsuskulusid suurendada 1 milj. krooni võrra.

b) Leida valitsuskulude multiplikaator, juhul kui tarbimise sõltuvus jääb samaks aga investeeringute sõltuvus rahvatulust on $I = I_0 + 0,1Y$.

Piirsuurused

Ühe muutuja funktsioonide marginaalanalüüsi korral oli piirsuurus vastava funktsiooni tuletis. Mitme muutuja funktsioonide marginaalanalüüsis kasutatakse osatuletisi.

Olgu meil tegemist n tootega ja q_i olgu i -nda toote kogus. Kulufunktsiooni ja tulufunktsioon sõltuvad kogustest $C(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ja $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$. **Piirkulu** ja **piirtulu** mingi i -nda toote jaoks on

$$MC_i = \frac{\partial C}{\partial q_i}$$

$$MR_i = \frac{\partial R}{\partial q_i}$$

Tootmisprotsessi iseloomustamisel kasutatakse mitmesuguseid üldisest tootmisfunktsioonist tuletatud funktsioone. Olgu meil $q(x_i)$ tootmisfunktsioon ja x_i i -nda tootmisteguri (kapital, tööjõud, keskkond, maa) maht. Siis **teguri piirtootlikkus** (*marginal productivity*):

$$MP_i = \frac{\partial q}{\partial x_i}$$

Näiteks kapitalihõive ühikulisest muutusest tingitud kogutoodangu muutus on **kapitali piirtootlikkus**, $MPK = \frac{\partial q}{\partial K}$. Tööhõive ühikulisest muutusest tingitud kogutoodangu muutus on **tööjõu piirtootlikkus**, $MPL = \frac{\partial q}{\partial L}$.

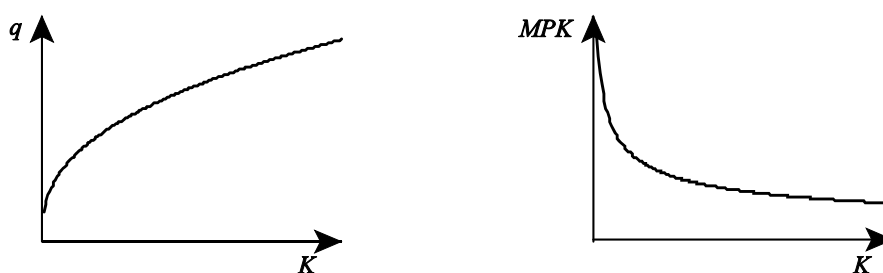
Olgu meil Cobb-Douglaste tootmisfunktsioon $q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$. Leiame kapitali piirtootlikkuse

$$MPK = \frac{\partial q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

Uurime, kuidas muutub kapitali piirtootlikkus kapitalihõive suurenedes:

$$\frac{\partial MPK}{\partial K} = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0$$

Osatuletis on negatiivne, järelikult konstantse tööhõive korral kapitalihõive suurenedes kapitali piirtootlikkus kahaneb.



Joonis 16 Kogutoodangu q ja kapitali piirtootlikkuse MPK muutus kapitalihõive K suurenemisel

Sama tulemuseni jõuame, kui uurime tööjõu piirtootlikkuse muutumist tööhõive suurenemisel.

Kahaneva piirtootlikkuse seadus: tootmisteguri hõive suurenemisel selle teguri piirtootlikkus kahaneb.

Ekstreemsetel juhtudel võib piirtootlikkus väheneda niivõrd, et muutub negatiivseks ja sellisel juhul tootmisteguri hõive suurenemisel kogutoodang väheneb.

Piirkasulikkus (*marginal utility*) — täiendava hüviseühiku tarbimise tõttu lisanduv kasulikkus.

Piirkasulikkuse matemaatiline väljendus on kasulikkusfunktsiooni $U(x_1, \dots, x_n)$ osatuletis hüvise koguse x_i järgi:

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

ÜLESANDED

2.27 Olgu firma kulufunktsioon $C(x, y) = 3x^2 + 7x + 1,5xy + 6y + 2y^2$, kus x ja y on kahe toote tootmismahud.

a) Leida piirkulu avaldised mõlema toote jaoks.

b) Kumba toote jaoks on piirkulu suurem, kui tootmismahud on $x = 5$ ja $y = 3$ ühikut.

2.28 Firma päevane kogutoodang on $q(K; L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kus K on kapital kümnetes tuhandetes kroonides ja L töötundides mõõdetud tööjõu kogus. Praegu on tootmisesse investeeritud 9 000 000 krooni ja iga päev kasutatakse 1000 töötundi. Marginaalanalüüsi abil leida oodatav päevatoodangu suurenemine, kui investeeritakse veel 10 000 krooni ja tööjõu hulk jääb samaks.

2.29 Teatud toote nõutav kogus q sõltub kahest suurusest: toote hinnast p ja reklaamile tehtud kulutustest c . Milline on osatuletiste q_p ja q_c majanduslik tõlgendus. Milliste märkidega on need osatuletised?

2.30 Kahte sorti apelsinimahla müümisel saadav kasum on $P(x, y) = (x - 30)(70 - 25x + 40y) + (y - 40)(80 + 6x - 70y)$ ühikut päevas, kus x on sordi A hind ja y sordi B hind. Praegu on hinnad vastavalt 11 kr 50 senti ja 12 krooni. Kasutades osatuletist, leida kasumi suurenemine, kui sordi A hinda suurendada 1 krooni võrra.

2.31 Toote A piirkasum on 50 kr ja toote B piirkasum 65 kr. Panna kirja kasumifunktsioon, kui on teada, et püsikulud on 4500 kr.

2.32 Kasulikkusfunktsioon on $U(x, y) = x^{0,7}y^{0,2}$, kus x on hüvise A tarbimiskogus ja y hüvise B tarbimiskogus. Leida, kumba hüvise piirkasulikkus on suurem, kui

a) hüvist A tarbitakse 5 ühikut ja hüvist B 10 ühikut

b) hüvist A tarbitakse 50 ühikut ja hüvist B 10 ühikut.

2.33 Kasulikkusfunktsioon $U(x, y) = x^{\frac{3}{2}}y$, kus x ja y on kahe hüvise kogused. Leida, milline seos peab hüviste koguste vahel olema, et piirkasulikkused oleksid võrdsed.

2.34 Kasulikkusfunktsioon on $U(x, y) = x^{0,12}y^{0,29}$, kus x on hüvise A tarbimiskogus ja y hüvise B tarbimiskogus. Leida, kumba hüvise piirkasulikkus on suurem, kui

a) hüvist A tarbitakse 50 ühikut ja hüvist B 100 ühikut

b) hüvist A tarbitakse 30 ühikut ja hüvist B 100 ühikut.

2.35 Kasulikkusfunktsioon $U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, kus x ja y on kahe hüvise kogused. Leida, milline seos peab hüviste koguste vahel olema, et piirkasulikkused oleksid võrdsed.

2.36 Toote A piirkasum on 150 kr, toote B piirkasum 190 kr ja toote C piirkasum 75 kr. Panna kirja kasumifunktsioon, kui on teada, et püsikulud on 7000 kr.

2.37 Näidata, et Cobb-Douglase tootmisfunktsiooni korral tööhõive suurenemisel tööjõu piirtootlikkus väheneb.

2.38 Näidata, et kasulikkusfunktsiooni $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$ korral on hüviste piirkasulikkused võrdsed, kui tarbimiskoguste suhe on võrdne suhtega $\frac{\alpha}{\beta}$.

Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal ja täismuut.

Olgu kahe muutuja funktsiooni $z(x, y)$ argumentide muudud Δx ja Δy . Funktsiooni **täismuuduks** Δz nimetatatakse vahet

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) .$$

Ühe muutuja funktsiooni $y(x)$ korral võis funktsiooni muudu ligikaudseks

arvutamiseks kasutada tuletist:

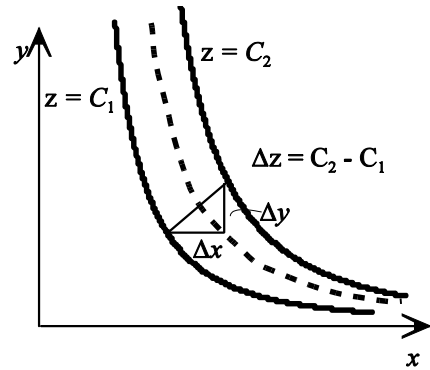
$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x .$$

Analoogselt kasutatakse osatuletisi kahe muutuja funktsiooni **täismuudu** ligikaudseks arvutamiseks:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Funktsiooni täismuut koosneb kahest osast:

$\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ - argumenti x muutusest tingitud z muutus konstantse y korral;
 $\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ - argumenti y muutusest tingitud z muutus konstantse x korral.



Joonis 17 Kahe muutuja funktsiooni täismuut

NÄIDE 2.21. Täismuut

Olgu meil kahe muutuja funktsioon $z(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 2x - 3y$. Leiame ligikaudu funktsiooni z täismuudu, kui argumenti x väärtus on 15 ja seda suurendatakse 1 võrra ning argumenti y väärtus on 12 ja seda suurendatakse 2 võrra.

Osatuletised on

$$z_x = 8x - 2$$

$$z_y = 10y - 3$$

Arvestades, et $\Delta x = 1$ ja $\Delta y = 2$:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = (8x - 2) \cdot \Delta x + (10y - 3) \cdot \Delta y = (8 \cdot 15 - 2) \cdot 1 + (10 \cdot 12 - 3) \cdot 2 = 352$$

Vastus: Funktsiooni täismuut on ligikaudu 352 ühikut.

Olgu meil kahe muutuja funktsioon $z(x, y)$. Selle funktsiooni nivoojoon $z(x, y) = \text{const}$ on joon xy -tasandil, mille võrrandi võib anda kujul $y = f(x)$.

Konstantse funktsiooni $z = \text{const}$ korral on funktsiooni täismuut 0:

$$\Delta z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = 0$$

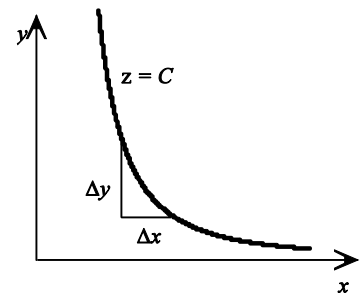
Kasutades lühemaid tähistusi,

$$z_x \Delta x + z_y \Delta y = 0 .$$

Leiame muudu Δy :

$$z_y \Delta y = -z_x \Delta x$$

$$\Delta y = -\frac{z_x}{z_y} \Delta x$$



Joonis 18 Argumentide muudud, mille korral kahe muutuja funktsiooni väärtus ei muutu.

Saime seose argumentide muutude Δx ja Δy vahel funktsiooni konstantsuse korral. See seos võimaldab leida, kui suur peab olema Δy , kui x muutub Δx võrra ja funktsiooni väärtus peab jääma samaks.

NÄIDE 2.22. Tööjõu asendamine kapitaliga

Ettevõtte A toodang päevas on $q = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kus K on investeeritud kapital tuhandetes kroonides ja L tööjõud töötundides. Praegu on tootmisse investeeritud 900 000 krooni ja iga päev tehakse tööd 120 töötundi. Kui palju tuleks teha lisainvesteeringuid, kui soovitakse tööjõudu vähendada 10%, aga tootmise tase peab säilima?

Lahendus:

$$\begin{aligned} K &= 900 \\ L &= 120 \\ \Delta L &= -0,1L \end{aligned}$$

$$q = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta K \approx -\frac{q_L}{q_K} \Delta L$$

$$q_K = 30K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}; \quad q_L = 20K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Delta K \approx -\frac{20K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}}{30K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}} \Delta L = -\frac{2K}{3L} (-0,1L) = -\frac{2 \cdot 900}{3 \cdot 120} \cdot (-0,1 \cdot 120) = 60$$

Vastus: Tööjõu vähendamisel 10% võrra tuleb tootmise taseme säilitamiseks investeerida lisaks 60 000 krooni.

Olgu meil kahest hüvisest sõltuv kasulikkusfunktsioon $U(x, y)$. Leiame hüvise Y koguse muutuse, kui suurendame hüvise X tarbimist 1 ühiku $\Delta x = 1$ võrra ja soovime kasulikkuse taset säilitada:

$$\Delta y = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \cdot \Delta x = -\frac{MU_x}{MU_y}$$

Siin arvestasime, et kasulikkusfunktsiooni osatuletis on piirkasulikkus MU . Kuna piirkasulikkused on positiivsed, on Δy negatiivne, mis tähendab, et meil tuleb vähendada hüvise Y tarbimist.

Asenduse piirmäär MRS (*marginal rate of substitution*) näitab, mitmest ühikust ühest hüvisest tuleb loobuda, et saada juurde 1 ühik teist hüvist sama kasulikkusetaseme juures.

Seega asenduse piirmäär on võrdne vastandmärgilise hüvise koguse muuduga $MRS_{YX} = -\Delta y$, kui $\Delta x = 1$.

Asenduse piirmäär avaldub piirkasulikkuste suhtena:

$$MRS_{YX} = \frac{MU_X}{MU_Y}$$

Tähistustest: MRS_{YX} näitab, mitmest ühikust Y tuleb loobuda, et saada juurde 1 ühik X. MRS_{XY} näitab, mitmest ühikust X tuleb loobuda, et saada juurde 1 ühik Y

NÄIDE 2.23. Asenduse piirmäär

Olgu kasulikkusfunktsiooni kuju järgmine: $U(x, y) = x^{\frac{3}{2}}y$, kus x ja y on kahe hüvise tarbimiskogused. Praegune tarbimistase on $x = 16$ ja $y = 20$ ühikut. Leiame asenduse piirmäära.

Lahendus:

$$U = x^{\frac{3}{2}} y$$

$$MRS_{YX} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y; \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$MRS_{YX} = \frac{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3y}{2x} = \frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 16} = 1,875$$

Vastus: Asenduse piirmäär on 1,875, see tähendab, et kasulikkuse taseme säilitamiseks, tuleb hüvise X koguse suurenemisel ühe ühiku võrra vähendada hüvise Y tarbimist 1,875 ühiku võrra.

Tootmisfunktsiooni uurimisel on üheks uurimisalaks tootmise sisendite asendatavus. **Tehnilise asendatavuse piirmäär** *MRTS* (*marginal rate of technical substitution*) annab ühe tootmisteguri ühikute arvu, mis on vajalik teise teguri ühe ühiku asendamiseks toodanguhulga samaks jäämisel. Näiteks tööjõu kapitaliga asendatavuse piirmäär kujutab endast kapitalikogust, mis on vajalik, et kompenseerida tööjõu ühiku vähenemist:

$$MRTS_{KL} = \frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{\partial q}{\partial K}} = \frac{MPL}{MPK}$$

Siin $q(K, L)$ on tootmisfunktsioon, MPL tööjõu ja MPK kapitali piirtootlikkus.

Asendades täismuudu avaldises argumentide muudud nende diferentsiaalidega dx ja dy , saadakse avaldis funktsiooni **täisdiferentsiaali** jaoks.

Funktsiooni $z(x, y)$ **täisdiferentsiaaliks** nimetatakse summat

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Järgnevalt uurime kahe muutuja funktsiooni $z = z(x, y)$ nivoojoone puutujaid. Piki nivoojoont on funktsioon konstantne: $z(x, y) = C$, mis ongi nivoojoone võrrand ilmutamata kujul. Ilmutatud kujul on nivoojoone võrrandiks $y = f(x)$. Selle joonele mingis punktis tõmmatud puutuja tõus on võrdne vastava funktsiooni tuletisega $\frac{dy}{dx}$. Tuletise leidmiseks kasutame aga seost, et piki nivoojoont on

funktsioon konstantne ja täisdiferentsiaal on null, $dz = 0$:

$$z_x dx + z_y dy = 0$$

Leiame suhte $\frac{dy}{dx}$:

$$z_y dy = -z_x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}$$

Kahe muutuja funktsiooni nivoojoone $z(x, y) = \text{const}$ **puutuja tõus** a :

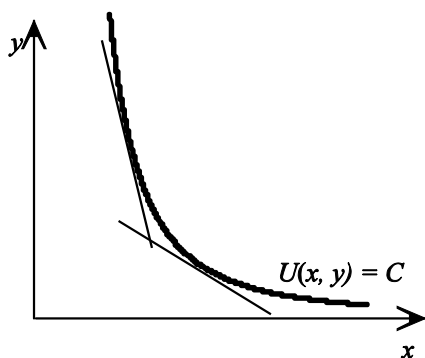
$$a = -\frac{z_x}{z_y}$$

Kuna samakasulikkuse joone (ka **ükskõiksuskõvera**) $U(x, y) = \text{const}$ korral on osatuletiste suhe asenduse piirmäär, on asenduse piirmäär võrdne puutuja tõusu absoluutväärtusega (joon.19):

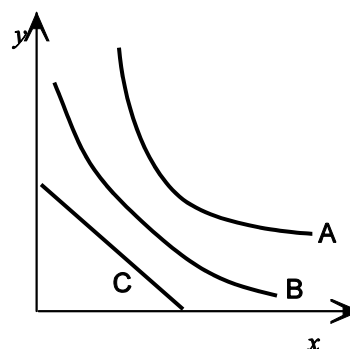
$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = MRS_{YX} .$$

Normaalsed samakasulikkuse jooned on kahanevad ja nõgusad. Sellest tulenevalt puutuja tõusu absoluutväärtus kahaneb hüvise koguse suurenedes.

Hüvise tarbimise kasvades asendamise piirmäär väheneb.



Joonis 19 Asenduse piirmäär on samakasulikkuse joone puutuja tõus..



Joonis 20 Samakasulikkuse jooned erinevate kaupade korral.

Joonisel 20 on toodud mõned samakasulikkusekõverad erinevate hüviste korral.

- ▶ A — hüvised X ja Y ei ole lähedased asendajad, asendamise piirmäär muutub palju;
- ▶ B — hüvised X ja Y on kergesti asendatavad, asendamise piirmäär muutub vähe;
- ▶ C — hüvised X ja Y asendavad teineteist täielikult. Täielikult asendatavate kaupade korral on samakasulikkusejooned sirged. Kuna sirge tõus on igas sirge punktis ühesugune, siis asendamise piirmäär on konstantne.

ÜLESANDED

2.39 Kirjastaja prognoosi kohaselt on uue raamatu müük seotud kirjastuskuludega x ja reklaamikuludega y järgmiselt: $q = 3x^{1.5}y$, kus q on müüdud eksemplaride arv ning kulud on tuhandetes kroonides. Konkreetse raamatu kirjastamiskuludeks oli planeeritud 36 000 krooni ja reklaamiks 25 000 krooni. Kahel meetodil, ligikaudu ja täpselt, leida, kuidas muutub prognoositav läbimüük, kui

- a) kirjastamiskulusid vähendada 500 krooni võrra ja reklaamikulusid suurendada 500 krooni võrra.
- b) kirjastamiskulusid vähendada 5000 krooni võrra ja reklaamikulusid suurendada 5000 krooni võrra.

2.40 Päevane kogutoodang on $q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ ühikut, kus K on kapital ja L tööjõud. Leida ligikaudu, mitu protsenti muutub päevane kogutoodang, kui kapitali suurendada 1% ja tööjõudu 2%.

2.41 Cobb-Douglaste tootmisfunktsioon on $q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, kus A ja α on positiivsed kontandid, $0 < \alpha < 1$ ning K on kapital ja L tööjõud. Leida ligikaudne kogutoodangu suhteline muutus, kui nii kapital kui tööjõud suurenevad 1% võrra.

2.42 Kasulikkusefunktsioon on $U(x, y) = 2x^3y^2$, kus x ja y on hüviste X ja Y tarbimiskogused. Praegu tarbitakse hüvist X 5 ühikut ja hüvist Y 4 ühikut. Leida asenduse piirmäär.

2.43 Kasulikkusefunktsioon on $U(x, y) = (x+1)(y+2)$, kus x ja y on hüviste X ja Y tarbimiskogused. Praegu tarbitakse hüvist X 25 ühikut ja hüvist Y 8 ühikut. Leida asenduse piirmäär.

2.44 Olgu kaup A hapukoor 250 grammistes pakkides ja kaup B hapukoor 500 grammistes pakkides. Milline on kauba A asendamise piirmäär?

2.45 Päevane kogutoodang on $q(K,L) = 120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ ühikut, kus K on kapital ja L tööjõud. Leida tööjõu kapitaliga asendatavuse piirmäär, kui praegu on tootmisesse investeeritud 4 milj. krooni ja tööjõudu kasutatakse 500 töötundi päevas.

2.46 Autotööstuse tootmisfunktsioon avaldub kujul $q = 7,40K^{0,674}L^{0,130}$ (vt näide 2.9). Siin q on käive (mlrd USD), K investeeritud kapital (mld USD) ja L töötajate arv.

a) Leida tööjõu kapitaliga asendatavuse piirmäär.

b) Leida tööjõu kapitaliga asendatavuse piirmäär ettevõtte BMW jaoks, kui kapitali on investeeritud 29 639 mld USD ja töötajate arv 118 tuhat (1999.a andmed).

2.47 Näidata, et kui tootmisfunktsiooni kuju on $q(K,L) = AK^\alpha L^\beta$, siis tööjõu kapitaliga asendatavuse piirmäär on võrdeline kapitalimahutustega ühe töötaja kohta.

II järku osatuletised

Osatuletistest võib võtta jälle osatuletisi. Neid nimetatakse **II järku osatuletisteks**. Kahe muutuja funktsioonil on neli II järku osatuletist:

Olgu z kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised olgu z_x ja z_y .

1. Osatuletise z_x osatuletis argumenti x järgi on

$$z_{xx} = (z_x)_x \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

2. Osatuletise z_x osatuletis argumenti y järgi on

$$z_{xy} = (z_x)_y \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

3. Osatuletise z_y osatuletis argumenti x järgi on

$$z_{yx} = (z_y)_x \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

4. Osatuletise z_y osatuletis argumenti y järgi on

$$z_{yy} = (z_y)_y \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

NÄIDE 2.24. Osatuletiste leidmine Leida funktsiooni $z = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$ kõik II järku osatuletised.

I järku osatuletis argumenti x järgi

$$z_x = y^3 + 5y^2 + 2$$

Sellest osatuletised x ja y järgi

$$z_{xx} = 0 \quad \text{ja} \quad z_{xy} = 3y^2 + 10y$$

I järku osatuletis argumendi y järgi

$$z_y = 3xy^2 + 10xy$$

Sellest osatuletised x ja y järgi

$$z_{yx} = 3y^2 + 10y \quad \text{ja} \quad z_{yy} = 6xy + 10x$$

II järku osatuletisi z_{xy} ja z_{yx} nimetatakse **segatuletisteks** ja enamike praktikas kasutatavate funktsioonide korral on nad võrdsed:

$$z_{xy} = z_{yx}$$

ÜLESANDED

Järgmistes ülesannetes leida kõik II järku osatuletised.

2.48 $z = 5x^4y^3 + 2xy$

2.49 $z = \frac{x+1}{y-1}$

2.50 $z = e^{x^2y}$

2.51 $z = \ln(x^2 + y^2)$

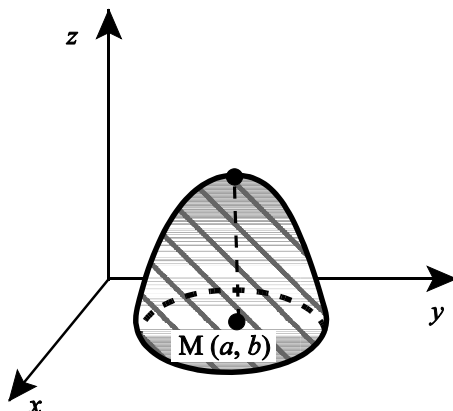
2.52 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.53 $z = x^2ye^x$

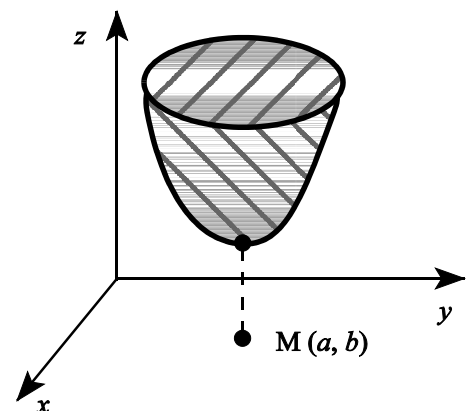
Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid.

Funktsioonil $z = f(x, y)$ on **lokaalne maksimum** punktis $M(a, b)$, kui leidub punkti M ümbrus $U(M)$, nii et iga punkti $K(x, y) \in U(M)$ korral $f(x, y) < f(a, b)$.
 Funktsioonil on $z = f(x, y)$ **lokaalne miinimum** punktis $M(a, b)$, kui leidub punkti M ümbrus $U(M)$, nii et iga punkti $K(x, y) \in U(M)$ korral $f(x, y) > f(a, b)$.

Geomeetriliselt tähendab lokaalne maksimum tippu pinnal $z = f(x, y)$ (joonis 21) ja lokaalne miinimum madalaimat punkti "nõo" põhjas (joonis 22).



Joonis 21 Kahe muutuja funktsiooni lokaalne maksimum



Joonis 22 Kahe muutuja funktsiooni lokaalne miinimum

Funktsiooni $z = f(x; y)$ **statsionaarseks punktiks** nimetatakse punkti $M(a; b)$, milles mõlemad esimesed tuletised on nullid:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_M = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_M = 0 .$$

Funktsiooni $z = f(x; y)$ **kriitiliseks punktiks** nimetatakse selle funktsiooni statsionaarset punkti, või punkti, milles ei eksisteeri $\frac{\partial z}{\partial x}$ või milles ei eksisteeri $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Lokaalse ekstreemumi olemasolu **tarvilik tingimus**:
Kui funktsioon omab mingis punktis lokaalset ekstreemumit, siis on see funktsiooni kriitiline punkt.

Vastupidine ei kehti. Igas kriitilises punktis ei pruugi olla lokaalset ekstreemumit.

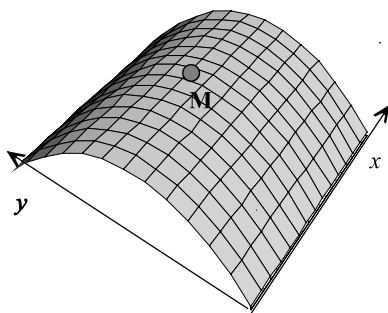
II järku tuletise test.

Olgu punkt $M(a; b)$ funktsiooni $z = f(x; y)$ kriitiline punkt. Leiame suuruse

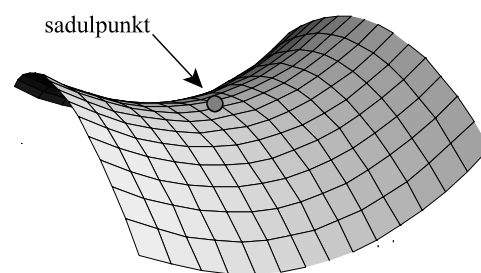
$$D = z_{xx}(a; b) z_{yy}(a; b) - z_{xy}^2(a; b)$$

Lokaalsete ekstreemumite olemasolu kontrollimiseks kontrollitakse suuruse D märki:

- ▶ $D < 0$ funktsioonil on punktis $M(a; b)$ sadulpunkt;
- ▶ $D > 0$ ja $z_{xx}(a; b) < 0$ funktsioonil on punktis $M(a; b)$ lokaalne maksimum;
- ▶ $D > 0$ ja $z_{xx}(a; b) > 0$ funktsioonil on punktis $M(a; b)$ lokaalne miinimum;
- ▶ $D = 0$ küsimus jääb lahtiseks, võib olla lokaalne ekstreemum või sadulpunkt.



Joonis 23



Joonis 24 Sadulpind

NÄIDE 2.25. Kasumi maksimeerimine mitme kauba korral

Firma kasumifunktsioon on

$$P(x; y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

kus x ja y on kahe kauba kogused. Leida kogused, mille korral kasum on maksimaalne. Kontrollida maksimumi olemasolu. Leiame I järku osatuletised:

$$\begin{aligned} P_x &= 64 - 4x + 4y \\ P_y &= 4x - 8y + 32 \end{aligned}$$

Võrdsustame osatuletised nulliga ja lahendame saadud võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} 64 - 4x + 4y = 0 \\ 4x - 8y + 32 = 0 \end{cases}$$

Lahenditeks on $x = 40$ ja $y = 24$, s.t kriitiline punkt on $(40;24)$.

Leiame II järku osatuletised:

$$P_{xx} = -4 \quad P_{yy} = -8 \quad P_{xy} = 4$$

$$D = P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2 = (-4) \cdot (-8) - 4^2 = 16$$

Kuna $D > 0$ ja $P_{xx} < 0$, on punktis $(40;24)$ lokaalne maksimum.

VASTUS: Kasum on maksimaalne, kui esimese kauba kogus on 40 ja teise kauba kogus 24 ühikut.

ÜLESANDED

2.54 Kasumifunktsiooni $P(x;y) = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$ korral, kus x ja y on kahe toote kogused, leida koguste väärtused, mille korral kasum on maksimaalne, kontrollida maksimumi olemasolu ja leida maksimaalse kasumi suurus.

2.55 Kasumifunktsioon on $P(x;y) = -0,2x^2 + 700x - 3xy - 0,5y^2 + 600y - 8000$, kus x ja y on kahe toote kogused.

Kontrollida lokaalse maksimumi olemasolu ja leida maksimaalne kasum.

2.56 Kasumifunktsiooni $P(x;y) = 25x - x^2 - xy - 2y^2 + 30y - 28$ korral, kus x ja y on kahe toote kogused, leida koguste väärtused, mille korral kasum on maksimaalne, kontrollida maksimumi olemasolu ja leida maksimaalse kasumi suurus.

2.57 Kahe toote nõudlusfunktsioonid on $q_1 = 25 - 0,5p_1$ ja $q_2 = 30 - p_2$. Kogukulu on $C = q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 + 20$. Leida optimaalsed kogused, optimaalsed hinnad ja maksimaalne kasum.

2.58 Kahe toote nõudlusfunktsioonid on $q_1 = 50 - 0,5p_1$ ja $q_2 = 76 - p_2$. Kogukulu on $C = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + 2q_2^2 + 55$. Leida optimaalsed kogused, optimaalsed hinnad ja maksimaalne kasum.

2.59 Tootja planeerib uue toote hinnaks 150 krooni ja prognoosib, et kui toote arendamiseks kulutada x tuhat krooni ja

müügikampaaniaks y tuhat krooni, siis nõutavaks koguseks kujuneb $q = \frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$ ühikut. Kui tootmiskulud on 50 krooni

ühiku kohta, kui palju peaks kulutama toote arendamiseks ja kui palju müügikampaaniaks, et saavutada suurimat kasumit?

2.60 Poemanikul on võimalus müüa kahe firma T-särke. Mõlemaid saab ta osta 2 kr tk ja prognoos näitab, et kui firma A särke müüa hinnaga x krooni ja firma B omi hinnaga y krooni, siis firma A särkide oodatavaks läbimüügiks kujuneb $40 - 50x + 40y$ ja firma B särkide oodatavaks läbimüügiks $20 + 60x - 70y$. Milliste hindadega tuleks särke müüa, et saada maksimaalset kasumit?

2.61 Tööstuseadmete tootja planeerib uue toote väljalaset. Prognoos näitab, et kui kohalikul turul on soov müüa seadmeid

koguses x tükki ja välisturul koguses y tükki, siis kohalikul turul peaks hinnaks olema $150 - \frac{x}{6}$ tuhat dollarit ja välisturul

$100 - \frac{y}{10}$ tuhat dollarit.

- Kui palju peaks müüma kohalikul turul, et sealt saadav tulu oleks maksimaalne?
- Kui palju peaks müüma välisturul, et sealt saadav tulu oleks maksimaalne?
- Kui palju peaks müüma kummalgi turul, et summaarne tulu oleks maksimaalne?

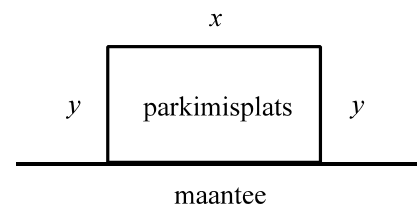
Tinglikud ekstreemumid

NÄIDE 2.26. Kitsendustega minimeerimise ülesanne

Maantee äärde on vaja rajada ristkülikukujuline parkimisplats pindalaga 5000 m^2 , mis tuleb kolmest küljest piirata aiaga. Leida platsi mõõtmed, nii et aia pikkus oleks minimaalne.

Lahendus: Olgu platsi mõõtmed x ja y . Aia pikkus on siis kahe muutuja funktsioon

$$z(x,y) = x + 2y.$$



Tuleb leida selle funktsiooni miinimumkoht, kusjuures kitsenduseks on

$$xy = 5000 \quad \text{ehk} \quad \varphi(x,y) = xy - 5000 = 0$$

Sellist kitsendusega ekstreemumülesannet nimetatakse funktsiooni **tingliku ekstreemumi** leidmiseks. Lihtsaimal juhul on tegemist kahe muutuja funktsiooniga $z = (x;y)$ ja ühe kitsendusega, mis antakse ilmutamata kujul $\varphi(x;y) = 0$. Üldiselt võib olla tegemist n -muutuja funktsiooniga ning kitsendusi võib olla rohkem $\varphi_1(x_i) = 0$, $\varphi_2(x_i) = 0$, ...

Tinglike ekstreemumite leidmiseks kasutatakse **Lagrange'i meetodit**.

1. Uuritavast funktsioonist ja kitsendusest moodustatakse uus funktsioon, mida nimetatakse **Lagrange'i funktsiooniks**:

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \varphi(x, y) .$$

2. Lahendatakse võrrandsüsteem

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

muutujate x ja y suhtes.

3. Võrrandsüsteemi lahendite hulgast leitakse tinglikud ekstreemumpunktid ja funktsiooni $z(x, y)$ tinglikud ekstreemumid.

Suurust λ nimetatakse **Lagrange'i kordajaks** (*Lagrange multiplier*) ja seda meetodit ka Lagrange'i kordajate meetodiks. See on abisuurus, mille tähendust võib konkreetsel juhudel uurida.

NÄIDE 2.26. Kitsendustega minimeerimisülesande järg. Kasutame nüüd Lagrange'i meetodit eespool toodud probleemi lahendamiseks. Tuleb leida selle funktsiooni $z(x, y) = x + 2y$ miinimumkoht, kusjuures kitsenduseks on $\varphi(x, y) = xy - 5000 = 0$. Vastav Lagrange'i funktsioon

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(xy - 5000)$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + \lambda x$$

Võrrandsüsteem

$$\begin{cases} 1 + \lambda y = 0 \\ 2 + \lambda x = 0 \\ xy - 5000 = 0 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist $\lambda = -\frac{1}{y}$. Asendades selle avaldise teise võrrandisse, saame

$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{y} = 0 \\ xy - 5000 = 0 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist $x = 2y$. Asendades selle avaldise teise võrrandisse, saame

$$\begin{aligned} 2y^2 - 5000 &= 0 \\ 2y^2 &= 5000 \\ y^2 &= 2500 \\ y &= \pm 50 \end{aligned}$$

Ülesannet rahuldab vaid positiivne väärtus ja seega $y = 50$ ja $x = 2y = 100$.

Vastus: Parkimisplatsi optimaalsed mõõtmed on $50 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ ja aia pikkuseks on 200 m .

NÄIDE 2.27. Optimaalne tootmisplaan

Kirjastaja prognoosi kohaselt on kirjastamiskulude x tuhat krooni ja reklaamikulude y tuhat krooni korral raamatu oodatavaks läbimüügiks $20x^{\frac{3}{2}}y$ eksemplari. Kokku on võimalik kulutada 60 tuhat krooni. Kui palju peaks kulutama kirjastamisele ja kui palju reklaamile, et läbimüük oleks maksimaalne?

Lahendus. Tuleb maksimeerida funktsiooni $z(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ kitsendava tingimuse $x + y = 60$ ehk $\varphi(x, y) = x + y - 60 = 0$ korral. Lagrange'i funktsioon

$$L(x, y, \lambda) = 20x^{\frac{3}{2}}y + \lambda(x + y - 60)$$

Osatuletised

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 30x^{\frac{1}{2}}y + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 20x^{\frac{3}{2}} + \lambda$$

Võrrandsüsteem

$$\begin{cases} 30x^{\frac{1}{2}}y + \lambda = 0 \\ 20x^{\frac{3}{2}} + \lambda = 0 \\ x + y - 60 = 0 \end{cases}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise, saame

$$\begin{cases} 30x^{\frac{1}{2}}y - 20x^{\frac{3}{2}} = 0 \\ x + y - 60 = 0 \end{cases}$$

Esimest võrrandist avaldame suuruse y

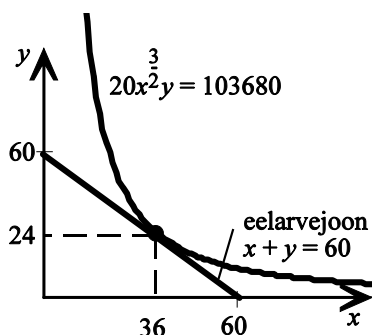
$$\begin{aligned} 30x^{\frac{1}{2}}y &= 20x^{\frac{3}{2}} & | \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ 30y &= 20x \\ y &= \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

Asetame y avaldise teise võrrandisse

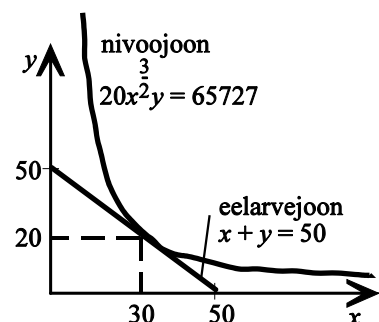
$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}x - 60 &= 0 \\ \frac{5}{3}x &= 60 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

ning $y = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$. Maksimumkoht on $(36; 24)$ ja maksimum $20 \cdot 36^{\frac{3}{2}} \cdot 24 = 103680$.

Vastus: Maksimaalse läbimüügi saavutamiseks tuleb kirjastamiseks kulutada 36 tuhat krooni ja reklaamile 24 tuhat krooni. Sellisel juhul on prognoositavaks läbimüügiks 103 680 eksemplari.



Joonis 26 Nivoojoone ja eelarvejoone lõikumine eelarve 60 000 korral.



Joonis 27 Nivoojoone ja eelarvejoone lõikumine eelarve 50 000 korral

NÄIDE 2.28. Optimaalne tootmisplaan

Statistiliste andmete alusel on määratud tootmisfunktsioon, mis seob kuu tootmismahu q tootmises kasutatud töötundide arvu T ja materjalihulga M vahel

$$q(T, M) = 509T + 2500M - 14T^2 - 21M^2$$

Otsesteks tootmiskuludeks on ette nähtud 18000 kr kuus. Töötunni hind on 85 kr ja materjaliühiku hind 350 kr. Eesmärgiks on koostada tootmiskuludeks ettenähtud summa ning kehtivate tööjõu ja materjali hindade juures tootmisplaan, mille korral toodangu maht on suurim.

Lahendus. Tuleb maksimeerida funktsiooni $q(T, M)$ kitsendava tingimuse $85T + 350M = 18000$ korral. Koostame vastava Lagrange'i funktsiooni

$$L = 509T + 2500M - 14T^2 - 21M^2 + \lambda(85T + 350M - 18000)$$

Leiame vastavad osatuletised, võrdsustame need nulliga ja kolmandaks võrrandiks lisame kitsendava tingimuse:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial T} = 509 - 28T + 85\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial M} = 2500 - 42M + 350\lambda = 0 \\ 85T + 350M - 18000 = 0 \end{cases}$$

Võrrandsüsteemi lahendamisel saame, et optimaalne töötundide arv $T=14$ ja materjalihulk $M=48$ ühikut. Toodangumaht kuus on sel juhul 76012 ühikut.

Lagrange'i meetodi olemus seisneb järgnevas. Graafiliselt tähendab funktsiooni $z(x,y)$ tingliku maksimumi leidmine kitsenduse $\varphi(x,y) = 0$ korral sellise kõrgeima nivoojoone $z(x,y) = C$ leidmist, mis puudutab kitsenduse joont.

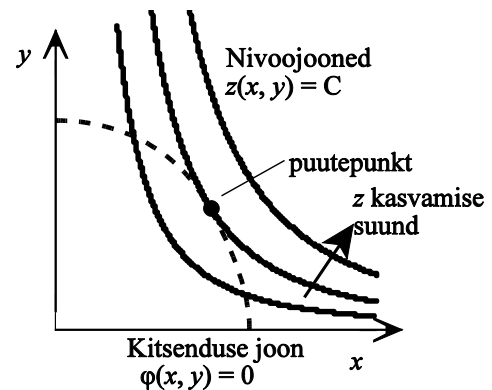
Puutepunktis langevad mõlema joone puutujad kokku, järelikult mõlema joone puutujad peavad puutepunktis olema ühesuguse tõusuga.

Varasemast on teada, et kahe muutuja funktsiooni nivoojoone puutuja tõus on osatuletiste suhte vastandiarv (vt lk. 65). Sellisel juhul nivoojoone $z(x,y) = C$ puutuja

tõus on $-\frac{z_x}{z_y}$, on aga kitsenduse joone $\varphi(x,y) = 0$ puutuja

tõus $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$. Järelikult peame näitama, et

$$-\frac{z_x}{z_y} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$



Joonis 28 Nivoojooned ja kitsenduse joon

Lagrange'i funktsiooni avaldisest

$$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

leitud osatuletised

$$L_x = z_x + \lambda\varphi_x \quad L_y = z_y + \lambda\varphi_y$$

on võrrandsüsteemi esimese kahe võrrandi põhjal võrdsed nulliga:

$$L_x = 0 \Rightarrow z_x + \lambda\varphi_x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{z_x}{\varphi_x}$$

$$L_y = 0 \Rightarrow z_y + \lambda\varphi_y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{z_y}{\varphi_y}$$

Kui võrrandite vasakud pooled on võrdsed, on võrdsed ka paremad pooled:

$$-\frac{z_x}{\varphi_x} = -\frac{z_y}{\varphi_y}$$

$$-\frac{z_x}{z_y} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

Optimaalne tarbimisplaan. Oletame, et tarbimiskomplekti kuulub kaks hüvist A ja B hindadega p_A ja p_B , mida tarbitakse kogustes x_A ja x_B . Kasulikkust väljendab kasulikkusfunktsioon $U(x_A, x_B)$. Meil tuleb leida sellised tarbimiskogused, mille korral kasulikkus on maksimaalne antud eelarve $p_A x_A + p_B x_B = c$ korral.

Kirjutame kitsendava tingimuse kujul $p_A x_A + p_B x_B - c = 0$.

Vastav Lagrange'i funktsioon

$$L(x_A, x_B, \lambda) = U(x_A, x_B) + \lambda(p_A x_A + p_B x_B - c)$$

Lagrange'i võrrandite süsteem

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{\partial U}{\partial x_A} + \lambda p_A = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_B} = \frac{\partial U}{\partial x_B} + \lambda p_B = 0 \\ p_A x_A + p_B x_B - c = 0 \end{cases}$$

Arvestades, et kasulikkusfunktsiooni osatuletised on vastavad piirkasulikkused, saame esimesest kahest võrrandist

$$\begin{aligned} MU_A + \lambda p_A = 0 &\Rightarrow -\lambda = \frac{MU_A}{p_A} \\ MU_B + \lambda p_B = 0 &\Rightarrow -\lambda = \frac{MU_B}{p_B} \end{aligned}$$

Järelikult $\frac{MU_A}{p_A} = \frac{MU_B}{p_B} = -\lambda$, mis tähendab, et optimaalse tarbimisplaaniga korral on kõikide hüviste

piirkasulikkuse ja hinna suhe konstantne ja võrdub vastandmärgilise Lagrange'i kordajaga λ . Lisaks sellele on näha, et optimaalse tarbimisplaaniga korral on piirkasulikkuste suhe võrdne hindade suhtega:

$$\frac{MU_A}{MU_B} = \frac{p_A}{p_B}.$$

ÜLESANDED

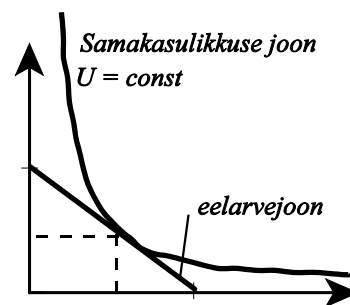
2.62 Olgu ühe kauba hind 20 krooni ja teise kauba hind 30 krooni. Kasulikkusfunktsioon on $U(x, y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$, kus x ja y on vastavate kaupade tarbimiskogused. Kokku võib kulutada 600 krooni. Kui palju peaks mõlemat kaupa tarbima, et kasulikkus oleks maksimaalne?

2.63 Kui kulutada x tuhat dollarit tööjõu peale ja y tuhat dollarit tootmise sisseadmiseks, on prognoositav toodang

$Q(x, y) = 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ ühikut. Kui kokku võib kulutada 120 000 dollarit, kui palju tuleks kulutada tööjõule ja kui palju tootmise sisseadmiseks, et saada maksimaalset toodangut?

2.64 Kulufunktsioon on $C = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$. Kui suurel hulgal tuleks toota toodet x ja toodet y , et kulud oleksid minimaalsed, kui mõlemat toodet kokku tuleb toota 34 ühikut? Kui suured on siis tootmiskulud?

2.65 Ettevõtja on kavandanud tootmiskulude suuruseks 1200 krooni nädalas ning arvestab töötunni T hinnaks 24 krooni ja materjaliühiku M hinnaks 32 krooni. Oma tootmistegevuse kavandamisel kasutab ettevõtja sama tegevusala firmade eelmise kvartali andmete põhjal koostatud tootmisfunktsiooni $q = 120T + 200M - 2T^2 - 2M^2$. Määrata maksimaalne võimalik tootmise maht ning selle kindlustamiseks vajalik ressurside hulk.



Joonis 29 Samakasulikkuse joone ja eelarvejoone lõikumine annab optimaalse hüviste koguste paari.

VASTUSED

2.1 3,8 mg **2.2** a) suureneb 4697,6 tuh. kr; b) suureneb 9395,2 tuh. kr; c) suureneb 200,5 tuh. kr; d) 3,19% **2.3** a) 160000, b) 16400 ühiku võrra, c) 4000 ühiku võrra, d) 20810 ühiku võrra. **2.4** b) vähendada 120 võrra. **2.5** b) 91095 kr.

2.6 a) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\}$, b) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\frac{2}{3}x\}$, c) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \geq |x|\}$, d) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \wedge y \neq 1\}$

2.7 a) muutub a_2 võrra; b) suureneb $\frac{a_4 x_4}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}$ % **2.9** a) konstantse asendusmääraga; toodetud arvutite arv

$q = z_1 + 2z_2$, kus z_1 on 64Mb mälu kiipide arv ja z_2 32 MB mälu kiipide arv; b) püsiproportsioonidega, ekskursioonide arv

$q = \min\left(\frac{z_1}{2}; z_2; z_3\right)$, kus z_1 on bussijuhtide arv, z_2 ekskursioonijuhtide arv ja z_3 busside arv; c) püsiproportsioonidega,

loengute arv $q = \min(z_1; z_2)$, kus z_1 on õppejõudude arv ja z_2 auditooriumite arv **2.8, 2.10** a) ca 34900 mld USD, -0,6%; b) ca

56600, -5,5% **2.11** a) Suureneb 1,59 korda; b) suureneb kaks korda, c) väheneb poole võrra. **2.12** a) väheneb $\sqrt[3]{2}$ korda;

c) suureneb 1,5 korda. **2.15** Esimesel juhul on kasulikkus 4,19 ühikut, teisel juhul 4,55, järelikult teisel juhul on rahulolu suurem. **2.16** Mõlemal juhul on kasulikkus ca 91 ühikut, need tarbimiskomplektid on samaväärsed. **2.17** $x_A = \frac{52,92}{\sqrt{x_B}}$,

$x_A = 11,8$ ühikut. **2.18** a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; b) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 4$; c) $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$; d) $y = 0$, $y = e^{-x}$;

e) $y = -\ln x$, $y = 1 - \ln x$. **2.19** $20a + 30b + 5000 = C$, $a = \frac{C - 5000}{20} - 1,5b$. **2.20** $800 + 2p_s - 4p_l = C$. **2.21** $L = \frac{C^{\frac{3}{2}}}{200^2 \sqrt{K}}$

2.22 $L = \frac{C^3}{2,7 \cdot 10^7 K^2}$. **2.23** a) $z_x = 2y^5 + 6xy + 2x$; $z_y = 10xy^4 + 3x^2$; b) $z_x = 10xy + 2y^3$, $z_y = 5x^2 + 6xy^2 + 6y$;

c) $z_x = 5 + 4x + 3y + 4y^2$; $z_y = 3x + 8xy - 6$. **2.24** a) $z_x = 15(3x + 2y)^4$; $z_y = 10(3x + 2y)^4$; b) $z_x = 18(6x + 7y)^2$;

$z_y = 21(6x + 7y)^2$; c) $z_x = 4x(x^2 + 4y)$; $z_y = 4(x^2 + 4y)$; d) $z_x = 3(x + xy + y)^2(1 + y)$; $z_y = 3(x + xy + y)^2(x + 1)$; e) $z_x = -\frac{3y}{2x^2}$;

$z_y = \frac{3}{2x}$; f) $z_x = \frac{2x}{y^3}$; $z_y = -\frac{3x^2}{y^4}$; g) $z_x = e^{xy} + xy e^{xy}$; $z_y = x^2 e^{xy}$; h) $z_x = y e^x + x y e^x$; $z_y = x e^x$; i) $z_x = -\frac{e^{2-x}}{y^2}$; $z_y = -\frac{2e^{2-x}}{y^3}$;

j) $z_x = e^{x+2y} + x e^{x+2y}$; $z_y = 2x e^{x+2y}$; k) $z_x = \frac{5y}{(y-x)^2}$; $z_y = \frac{-5x}{(y-x)^2}$; l) $z_x = \frac{y^2 - x^2 y^5}{(x^2 y^3 + 1)^2}$; $z_y = \frac{2xy - x^3 y^4}{(x^2 y^3 + 1)^2}$; m) $z_x = \ln y$; $z_y = \frac{x}{y}$;

n) $z_x = \ln xy + 1$; $z_y = \frac{x}{y}$. **2.25** 5 milj. kr. **2.26** a) 10 milj. kr, b) $M = 5$. **2.27** a) $MC_x = 6x + 7 + 1,5y$; $MC_y = 1,5x + 6 + 4y$,

b) $MC_x(5; 3) = 41,5$, $MC_y(5; 3) = 25,5$. **2.28** Suureneb 10 ühikut. **2.30** Suureneb 557 ühikut. **2.31, 2.36** $P = 50a + 65b - 4500$,

kus a ja b on vastavate toodete kogused **2.32** a) hüvise A piirkasulikkus on suurem (0,68 ja 0,098); b) hüvise B piirkasulikkus

on suurem (0,34 ja 0,49). **2.33** $y = \frac{2}{3}x$. **2.34** a) hüvise B piirkasulikkus on suurem (0,015 ja 0,018), b) hüvise A piirkasulikkus

on suurem (0,023 ja 0,017) **2.35** $y = x$. **2.36** $P = 150a + 190b + 75c - 7000$, kus a ja b on vastavate toodete kogused **2.39** a)

läbimüük väheneb ca 13,5 tk, täpselt 19 tk; b) väheneb ca 135 tk, täpselt 666 tk. **2.40** Suureneb 1,17%. **2.41** Suureneb 1%.

2.42 1,2 ühikut. **2.43** $\frac{5}{13}$ ühikut. **2.44** 0,5. **2.45** 8000 krooni ühe töötunni kohta. **2.46** a) $0,193 \frac{K}{L}$, b) 48,5 milj USD 1 töötaja

kohta. **2.48** $z_{xx} = 60x^2 y^3$, $z_{yy} = 30x^4 y$, $z_{xy} = z_{yx} = 60x^3 y^2 + 2$ **2.49** $z_{xx} = 0$, $z_{yy} = \frac{2x+2}{(y-1)^3}$, $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{(y-1)^2}$

2.50 $z_{xx} = 2y(1 + 2x^2 y)e^{x^2 y}$, $z_{yy} = x^4 e^{x^2 y}$, $z_{xy} = z_{yx} = 2x(1 + x^2 y)e^{x^2 y}$ **2.51** $z_{xx} = -2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $z_{yy} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$,

$z_{xy} = z_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ **2.52** $z_{xx} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{yy} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{xy} = z_{yx} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ **2.53** $z_{xx} = y e^x (2 + 4x + x^2)$, $z_{yy} = 0$,

$z_{xy} = z_{yx} = x e^x (2 + x)$ **2.54** $x = y = 20$; $P_{\max} = 2782$ **2.55** lokaalne maksimum puudub. **2.56** $x = 10$, $y = 5$, $P_{\max} = 172$ **2.57** $q_1 = 7$,

$q_2 = 4$, $p_1 = 36$, $p_2 = 26$, $P_{\max} = 215$ **2.58** $q_1 = 8$, $q_2 = 10$, $p_1 = 84$, $p_2 = 66$, $P_{\max} = 725$ **2.59** Arendamiseks 4000, kampaaniaks

6000 kr. **2.60** $x = 2,7\$$ ja $y = 2,5\$$ **2.61** Kui AC on kulud ühe seadme kohta, siis a) $x = 450 - 3AC$, b) $y = 500 - 5AC$,

c) $x = 450 - 3AC$ ja $y = 500 - 5AC$. **2.62** 18 ja 8 ühikut **2.63** 40 000 töötajale, 80 000 tootmise sisseadmiseks **2.64** $x = 21$,

$y = 13$, $C = 4093$ ühikut. **2.65** $T = 13,2$; $M = 27,6$; $q = 5232$

TERMINID

- absoluutne miinimum 30
 absoluutne maksimum 30
 argumendid 47
 asenduse piirmäär 63
 Cobb-Douglas'e tootmisfunktsiooniks 50
 diferentsiaal 4, 12
 diskrimineeriv hinnapoliitika 37
 elastsusanalüüs 1
 ettevõtte põhieesmärk 49
 ettevõtte mudel 49
 firmateooria 49
 funktsioon 47
 funktsiooni diferentsiaal 12
 globaalne miinimum 30
 globaalne maksimum 30
 globaalsed ekstreemid 30
 hüviste nõudluse teooria 53
 I järku Taylorige valem 12
 II järku osatuletised 66
 II järku tuletise test 68
 joonelastsuskoefitsient 40
 käänupunkt 26, 27
 kaarelastsuskoefitsient 40
 kahanemiskiirkond 20
 kahaneva piirtootlikkuse seadus 60
 kahanev 19
 kahe muutuja funktsioon 47
 kapitali piirtootlikkus 60
 kapitalitootlikkuseks 52
 kasulikkusfunktsiooni 53
 kasvamispiirkond 20
 kasvav 19
 keskmine kiirus 2
 Keynesi tarbimisfunktsioon 58
 kiirus 4
 konstantse asenduse määraga 50
 kriitiline punkt 21, 68
 kumer 26, 27
 kumeruspiirkond 26
 Lagrange'i funktsioon 70
 Leontieffi tootmisfunktsioon 50
 lokaalne miinimum 18, 67
 lokaalne maksimum 18, 67
 lokaalse ekstreemumi piisav tingimus 22
 lokaalsed ekstreemumkohad 18
 lokaalsed ekstreemumid 18
 määramispiirkond 47
 majapidamise turukäitumise põhieesmärk 53
 majapidamisteooria 53
 marginaalanalüüs 1
 multiplikaator 59
 n muutuja funktsioon 46
 n -järku tuletis 24
 neoklassikaline tootmisfunktsioon 51
 nivoojooned 54
 nõgus 26, 27
 nõgusus 26
 nõgususpiirkond 26
 nõudluse hinnaelastsuskoefitsient 40, 41
 optimaalne 32
 optimaalne tarbimisplaan 73
 optimaalsuskriteerium 32
 optimeerimine 1, 32
 osatuletis 56
 piirkasulikkus 60
 piirkasum 36
 piirkulu 59
 piirtulu 59
 punktelaastus 41
 püsiportsioonidega tootmisfunktsioon 49
 puutuja tõus 65
 relatiivne miinimum 18
 relatiivne maksimum 18
 samatoodangukõverad 54
 segatuletised 67
 sisendid 49
 sõltumatud muutujad 47
 sõltuv muutuja 47
 statsionaarne punkt 68
 täisdiferentsiaal 64
 täismuut 61, 62
 tarbija käitumise teooria 53
 tarbimise piirkalduvus 58
 tarbimisfunktsioon 46
 tarbimismudel 58
 tarvilik tingimus 22, 68
 tasakaalunõue 58
 tasandilõige 54
 teguri piirtootlikkus 60
 tehnilise asendatavuse piirmäär 64
 teist järku tuletis 24
 tinglik ekstreemum 69
 tööjõu piirtulu 16
 tööjõu tootlikkus 51
 tööjõu piirtootlikkus 60
 tootmisfunktsioon 49
 tootmisfunktsiooni isokvant 54
 tootmisfunktsiooni üldkuju 49
 tootmissisendi piirtulu 16
 tootmistegurid 49
 ükskõiksuskõver 65
 võimendi 59

SISUKORD

1. Ühe muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutus	1
Probleeme, mis nõuavad diferentsiaalarvutust	1
Funktsiooni muutumine ja keskmine kiirus lõigul	1
Funktsiooni tuletis	3
Tuletis ja funktsiooni graafiku puutuja	6
Tuletise leidmise reeglid	8
Funktsiooni diferentsiaal ja ligikaudne muutus	12
Piirsuurused. Marginaalanalüüs	14
Liitfunktsiooni tuletis	15
Lokaalsed ekstreemumid	17
Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	19
Lokaalsete ekstreemumite määramine. Tarvilik ja piisav tingimus	20
Funktsiooni kõrgemat järku tuletised	24
Funktsiooni kumerus, nõgusus ja käänupunktid	26
Lokaalsete ekstreemumite määramine II tuletise abil	29
Globaalsed ekstreemumid	30
Optimeerimisülesanded	32
Varude juhtimine	33
Marginaalanalüüsi kasutamine	36
Seos piirsuuruste ja keskmiste suuruste vahel	39
Nõudluse hinnaelastsus	40
Seos hinnaelastsuse ja kogutulu vahel	42
 VASTUSED	 44
2. Mitme muutuja funktsioonid	46
Mitme muutuja funktsiooni mõiste	46
Tootmisfunktsioon	49
Kasulikkusfunktsioon	53
Kahe muutuja funktsiooni graafik ja nivoojooned	53
Osatuletised	56
Tarbimismudel	58
Piirsuurused	59
Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal ja täismuut.	61
II järku osatuletised	66
Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	67
Tinglikud ekstreemumid	69
 VASTUSED	 74
 TERMINID	 75
 SISUKORD	 76
 NÄITED	
NÄIDE 1.1. Kiiruse muutumine	1
NÄIDE 1.2. Kulude muutumise kiirus	1
NÄIDE 1.3. Pakutava koguse muutumise kiirus	2
NÄIDE 1.4. Koguse muutumise kiirus konkreetse hinna korral	3
NÄIDE 1.5. Kasumi sõltuvus hinnast	6
NÄIDE 1.6. Puutuja võrrandi leidmine	7
NÄIDE 1.7. Kasumi muutumise kiirus	10
NÄIDE 1.8. Funktsiooni diferentsiaali leidmine	12
NÄIDE 1.9. Funktsiooni ligikaudne muutus	12
NÄIDE 1.10. Funktsiooni suhteline muutus	13
NÄIDE 1.11. Funktsiooni suhteline muutus	13
NÄIDE 1.12. Tööjõu piirtulu	16

NÄIDE 1.13. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonna leidmine	20
NÄIDE 1.14. Kasvamise või kahanemise määramine antud punktis	20
NÄIDE 1.15. Statsionaarsete punktide leidmine	21
NÄIDE 1.16. Kasvamis- ja kahanemiskiirkonna ning lokaalsete ekstreemumite määramine	22
NÄIDE 1.17. Kasvamis- ja kahanemiskiirkonna ning lokaalsete ekstreemumite määramine	23
NÄIDE 1.18. II tuletise leidmine	24
NÄIDE 1.19. Kõrgemat järku tuletiste	24
NÄIDE 1.20. Tootlikkus ja selle muutumise kiirus.	24
NÄIDE 1.21. Kumer või nõgus antud punktis	27
NÄIDE 1.22. Lokaalsete ekstreemumite leidmine	29
NÄIDE 1.23. Globaalne miinimum: minimaalsed kulud tooteühiku kohta	31
NÄIDE 1.24. Rentimine: tulude maksimeerimine.	32
NÄIDE 1.25. Marginaalanalüüs	36
NÄIDE 1.26. Hinnadiskriminatsioon	37
NÄIDE 1.27. Keskmise kulu ühiku kohta ja piirkulu	39
NÄIDE 1.28. Hinnaelastsuskoeffitsiendi leidmine	41
NÄIDE 2.1. Tootlikkuse lineaarne mudel.	46
NÄIDE 2.2. Tarbimisfunktsioon kui mitme muutuja funktsioon	46
NÄIDE 2.3. Kogutulu kui kahe muutuja funktsioon	46
NÄIDE 2.4. Kahe muutuja funktsiooni arvutamine.	47
NÄIDE 2.5. Kahe muutuja funktsiooni määramiskiirkonna leidmine	47
NÄIDE 2.6. Kahe muutuja funktsiooni määramisepiirkonna leidmine	47
NÄIDE 2.7. Kahe muutuja funktsiooni määramiskiirkonna leidmine.	47
NÄIDE 2.8. Tulu sõltuvus asenduskaupade hindadest	48
NÄIDE 2.9. Tootmisfunktsioon autotööstuses	51
NÄIDE 2.10. Tootmisfunktsioon	51
NÄIDE 2.11. Tootmisfunktsioon	51
NÄIDE 2.12. Kahe muutuja funktsiooni graafik	53
NÄIDE 2.13. Samatoodangukõverad	55
NÄIDE 2.14. Samakasulikkuse jooned	55
NÄIDE 2.15. Osatuletiste leidmine	56
NÄIDE 2.16. Osatuletiste leidmine	57
NÄIDE 2.17. Osatuletiste leidmine	57
NÄIDE 2.18. Osatuletiste leidmine	57
NÄIDE 2.19. Osatuletiste leidmine	57
NÄIDE 2.20. Kogutulu muutumise kiirus ühe või teise kauba hinna muutumisel.	58
NÄIDE 2.21. Täismuut	62
NÄIDE 2.22. Tööjõu asendamine kapitaliga	62
NÄIDE 2.23. Asenduse piirmäär	63
NÄIDE 2.24. Osatuletiste leidmine	66
NÄIDE 2.25. Kasumi maksimeerimine mitme kauba korral	68
NÄIDE 2.26. Kitsendustega minimeerimise ülesanne	69
NÄIDE 2.26. Kitsendustega minimeerimisülesande järg.	70
NÄIDE 2.27. Optimaalne tootmisplaan	70
NÄIDE 2.28. Optimaalne tootmisplaan	71